

**Strojenie fortepianów
w teorii i praktyce**

Janusz Starzyk

**Strojenie fortepianów
w teorii i praktyce**

Wojkówka 2024 r.

Wydawca: **APLA** Andrzej Skibicki
e-mail: biuro@pracownia-apla.pl, tel. 502 677 837

Tekst: Janusz Starzyk

Zdjęcia: Na zdjęciach Jarosław Bednarski (archiwum prywatne)
Rysunki autora
Wykresy wygenerowane programem GNU Octave

Druk: Perfekt – Gaul i wspólnicy sp.j.
ul. Skórzewska 63
60-185 Skórzewo
tel. 61 666 02 05

Copyright by APLA, Janusz Starzyk

ISBN: 978-83-62967-57-5

Spis treści

Słowo wstępne	7
Podstawowe wiadomości o falach	9
Długość fali	10
Częstotliwość i okres drgań fali	11
Fala poprzeczna lub podłużna	11
Polaryzacja fali poprzecznej	12
Co to jest dźwięk	13
Wrażenia słuchowe	14
Podstawowe parametry fali akustycznej	15
Wysokość dźwięku	15
Głośność dźwięku	15
Barwa dźwięku	17
Słyszenie – budowa ucha	17
Pomiary dźwięku	18
Nakładanie się fal (interferencja)	20
Obwiednia fali	20
Zjawiska zachodzące w strunie	21
Drgania struny	21
Składowe harmoniczne	23
Prawa Younga	24
Zjawisko nieharmoniczności	26
Dudnienia	28
Modulacja amplitudy i częstotliwości	38
Fałszywe struny	38
Fala podłużna w strunie	40
Dźwięki w muzyce	42
Konsonanse i dysonanse	42
Częstotliwości dźwięków w muzyce	43
Oktawa	43
Kwinta	43
Tercja	43
Historia dźwięków wzorcowych	44
Systemy strojenia	46
Strój naturalny	46
Strój pitagorejski – kwintowy	54

Strój temperowany.....	49
Strój równomiernie temperowany.....	50
Strój równomiernie temperowany o czystych kwintach.....	52
Inne podziały oktawy	54
Cent.....	54
Centyton.....	55
Milioktawa.....	55
Komaty	55
Komat pitagorejski.....	56
Komat syntoniczny	57
Schizma.....	58
Komat enharmoniczny, dieza	59
Kleizma.....	59
Komat septymowy	60
Komat sekstowy dekafoniczny.....	60
Różne sposoby zapisu dźwięków	61
Różne są sposoby zapisywania systemów strojenia	63
Strojenie w praktyce.....	66
Sposoby ustawiania równomiernej temperacji.....	68
Metoda kwintowo-oktawowa.	68
Metoda kwintowo-kwartowa.	69
Metoda tercjowo-sekstowa	69
Praktyczny sposób strojenia	70
Praktyczne porady.....	74
Różności.....	77
Wilgotność	77
Pitagoras w kuźni.....	78
Rozciąganie oktaw w związku z kubaturą sali.....	78
Strój 432 Hz.....	78
Bach nie wymyślił i nie wprowadził równomiernej temperacji.....	79
Nie ma potrzeby stroić fortepianu co dwa tygodnie, gdy podnosimy strój powyżej ćwierć tonu	79
Nie ma potrzeby stroić fortepianu po przestawianiu instrumentu.....	79
Elektroniczne pomiary.....	79
Duplex i struny alikwotowe	80
Zakładanie strun gładkich	81
Bibliografia.....	82

Słowo wstępne

Fortepian jest skomplikowanym instrumentem, w którym około 230 strun powinno generować dźwięki o 88 wysokościach. Stroiciele fortepianów mają za zadanie tak ustawić wysokości dźwięków, aby całość zadowalała wykonawców i słuchaczy. Stroicielowi oprócz wiedzy i wrażliwości muzycznej potrzebna jest znajomość fizyki, mechaniki i matematyki.

Przez wiele lat zbierałem informacje na temat działania fortepianu, zasad strojenia i drgań strun. Ta wiedza jest rozproszona w różnych książkach, publikacjach i artykułach. Teksty są pisane albo przez muzyków, albo przez fizyków, albo dotyczą szczegółów konstrukcji instrumentu. W tej publikacji postarałem się zebrać podstawową wiedzę teoretyczną i praktyczną dotyczącą strojenia fortepianów. Staralem się w jak najprostszy sposób przedstawić matematyczne szczegóły drgań struny oraz percepcji dźwięku. Wiele informacji potraktowałem hasłowo, zaznaczając istnienie zjawiska, a jeśli ktoś chciałby się zagłębić w szczegóły, to na końcu umieściłem bibliografię.

W pierwszej części przedstawiłem podstawy ruchu falowego i percepcji dźwięku, następne rozdziały dotyczą już tylko strun, ich drgań i dźwięków generowanych przez fortepian. W części dotyczącej praktyki strojenia opisałem w sposób bardzo subiektywny operowanie kluczem stroicielskim, kolejności strojonych dźwięków oraz słuchania dudnień. Są to tylko moje spostrzeżenia i opinie wypracowane w prawie czterdziestoletniej praktyce. Uważam, że każdy stroiciel powinien opracować sobie swój model działania podczas strojenia, jednak poznanie różnych sposobów i metod pozwala skrócić czas dochodzenia do zadowalających wyników pracy.

Pragnę podziękować kolegom ze Stowarzyszenia Polskich Stroicieli Forte-pianów za pomoc i konstruktywne rozmowy.

Podstawowe wiadomości o falach

Ruch falowy jest bardzo dokładnie opisany w teorii fizyki. W przyrodzie spotykamy fale mechaniczne, elektromagnetyczne oraz prawdopodobnie grawitacyjne. Dźwięk jest falą mechaniczną. Badaniem fal dźwiękowych zajmuje się dział nauki zwany akustyką, jednak obecnie jest to już dziedzina interdyscyplinarna, obejmująca fizykę, matematykę, muzykę, architekturę, medycynę, przemysł itp. Tutaj skupimy się na drganiach strun, ale musimy zdefiniować podstawowe pojęcie dźwięku i ruchu falowego.

Fala mechaniczna jest zaburzeniem rozprzestrzeniającym się w ośrodku w którym cząsteczki oscylują wokół swojego położenia równowagi przenosząc energię bez transportu materii.

Najprostszą metodą opisywania ruchu falowego jest przedstawienie ciała w ruchu jednostajnym po kole. Ciało krąży po torze kołowym pokonując w równych jednostkach czasu równe łuki koła, czyli porusza się z prędkością kątową (ω). Taki ruch można opisać matematycznie jako zależność zmiany kąta w czasie. Przebieg takiej zależności jest funkcją sinusoidalną, którą łatwo można pokazać na wykresach. Ten sam efekt otrzymamy analizując ruch wahadła w funkcji czasu. Ten ruch jest opisany wzorem:

$$s = A \sin \left(2\pi \frac{t}{T} \right)$$

gdzie:

s – wychylenie punktu w czasie t

A – amplituda – maksymalne wychylenie od wartości zerowej

T – okres drgań

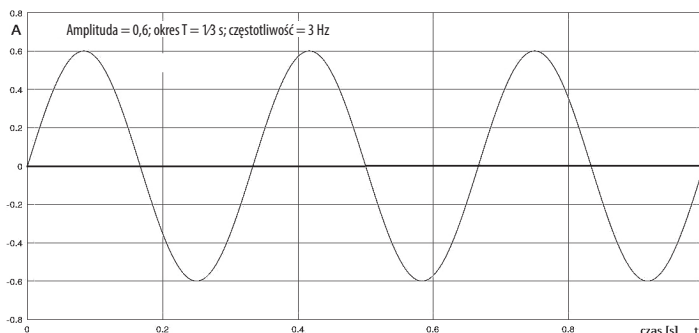
Okres jest to czas w którym fala wykonuje jeden cykl drgań. Okres możemy obliczyć ze wzoru

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

gdzie:

T – okres [w sekundach]

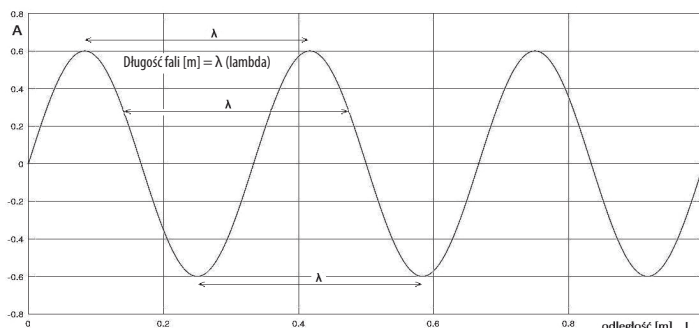
ω – pulsacja kołowa [radian/sekundę]



Przykładowy wykres przebiegu sinusoidalnego w czasie.

Długość fali

Długość fali najlepiej jest widoczna, gdy na chwilę „zatrzymamy” falę w jej ruchu. Wówczas długością będzie najmniejsza odległość między dwoma punktami fali, różniącymi się o dokładnie jeden cykl tych drgań – np. pomiędzy dwoma najbliższymi szczytami fali, ew. «dołami» fali. Długość fali jest wyrażona w metrach, a oznaczana zwykle małą grecką literę lambda (λ). Czas w którym fala pokonuje odległość λ nazywamy okresem [T].



Wykres zmian amplitudy w funkcji odległości – długość fali

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

Długość fali można obliczyć dzieląc prędkość z jaką porusza się fala w ośrodku (v) przez jej częstotliwość (f).

Częstotliwość i okres drgań fali

Częstotliwość drgań równa jest ilości pełnych cykli, jakie wykonują punkty ośrodka w ciągu jednostki czasu (najczęściej sekundy). Częstotliwość drgań jest ściśle związana z okresem.

Częstotliwość (f) jest odwrotnością okresu (T).

$$f = \frac{1}{T}$$

Jednostką częstotliwości jest herc. Nazwa pochodzi od nazwiska niemieckiego fizyka Heinricha Hertza (1857–1894), zapisujemy go skrótowo jako Hz [$1\text{Hz} = 1/\text{s}$], wcześniej używano cykli na sekundę [c/s].

Analizowanie ruchu falowego możemy rozpocząć od dowolnego momentu, musimy wówczas określić fazę. Faza określa, w której części okresu znajduje się analizowany punkt fali. Jeśli nakładają się dwie fale różniące się fazą, to obserwujemy przesunięcie fazowe tych fal. Przesunięcie fazowe wyrażamy w stopniach kątowych, radianach, sekundach lub części okresu.

Fala poprzeczna lub podłużna

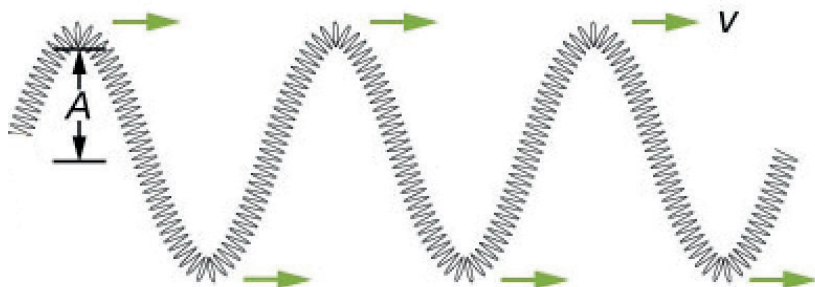
Fala podłużna to fala, w której kierunek drgań cząsteczek ośrodka i rozchodzenia się fali są zgodne. W przypadku fali poprzecznej rozchodzi się ona prostopadle do kierunku drgań ośrodka. Zobrazować to można przy pomocy sprężyny. Fale akustyczne są przykładem fal podłużnych.

v – (zielona strzałka) kierunek rozchodzenia się fali

A – (czarna strzałka) kierunek drgań ośrodka.



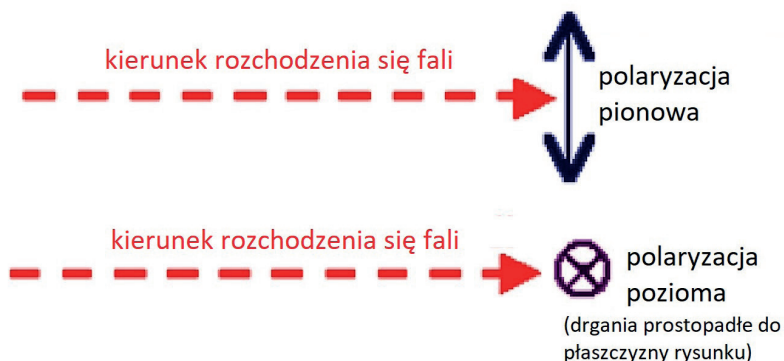
Fala podłużna.



Fala poprzeczna.

Polaryzacja fali poprzecznej

Drgania poprzeczne mają dodatkową uzupełniającą właściwość zwaną polaryzacją. Polaryzacja określa również kierunek w przestrzeni wzdłuż którego zachodzi drganie.



Polaryzacja fali poprzecznej

W węższym sensie termin „polaryzacja” używany jest tylko w odniesieniu do fal poprzecznych i określa właśnie kierunek drgań w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku rozchodzenia się. Przedstawione na rysunku postacie polaryzacji odnoszą się do tzw. „polaryzacji liniowej” (nazywanej też polaryzacją „płaską”), w której kierunek drgań nie zmienia się. W tym wypadku polaryzacja może być:

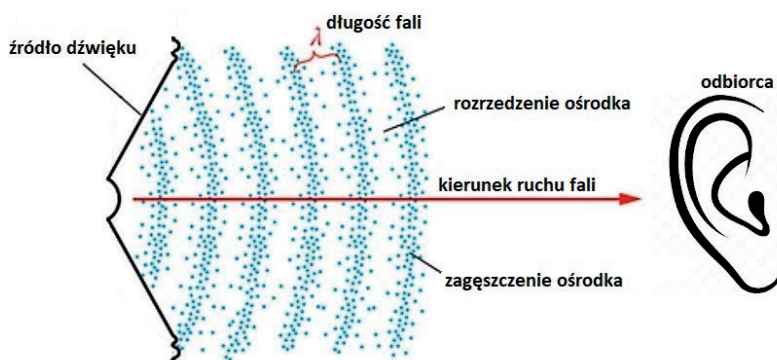
- pozioma
- pionowa
- pod ustalonym kątem do poziomemu lub pionu

Istnieje jeszcze jeden rodzaj polaryzacji fal poprzecznych – tzw. polaryzacja kołowa (ewentualnie eliptyczna). Mówimy o niej wtedy, gdy kierunek wektora wielkości drgającej zatacza okręgi (lub elipsy) wokół kierunku rozchodzenia się fali. W tym przypadku polaryzację dzielimy na prawoskrętną lub lewoskrętną, często też stosuje się termin: obrót „zgodny” lub „przeciwny” do ruchu wskazówek zegara.

Jeżeli w ośrodku rozchodzą się dwie lub więcej różnych fal, to wypadkowe drganie cząstek ośrodka, a zatem i wypadkowa fala jest sumą fal składowych. Fale nawzajem nakładają się (interferencja), ulegają załamaniu, ugięciu (dyfrakcja) i odbiciu od ośrodków o innej gęstości, niż te, w których się poruszają. Energia fali może być pochłaniana przez różne materiały, a także zamieniana na ciepło, co powoduje stopniowe wygaszanie drgań.

Co to jest dźwięk?

Dźwięk jest to wrażenie słuchowe, spowodowane drganiami akustycznymi rozchodzącymi się w ośrodku sprężystym (ciele stałym, cieczy, gazie). Drgania akustyczne to drgania mechaniczne polegające na ruchu cząsteczek środowiska sprężystego, rozchodzące się w ośrodku jako zaburzenie jego gęstości. Aby zaistniał dźwięk musi być jego źródło, ośrodek przewodzący (sprężysty) i odbiorca (słuchacz).



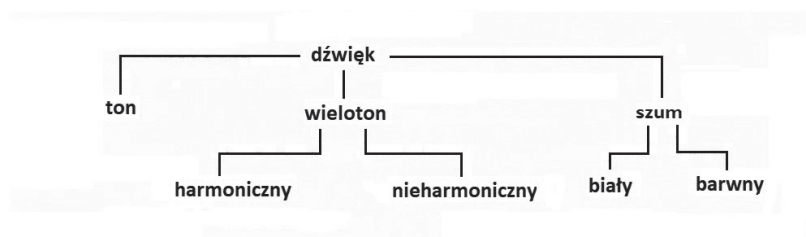
Źródło, ośrodek i odbiorca dźwięku

Fala akustyczna dociera do naszego ucha i powoduje odchyłanie błony bębenkowej, a poprzez skomplikowany system zostaje odczytywana przez mózg jako dźwięk. Ludzie zwykle słyszą dźwięki od 16 do 20 000 Hz. Prędkość rozchodzenia się fali dźwiękowej zależy od rodzaju ośrodka. W powietrzu, przy stałym ciśnieniu, w zależności od temperatury, wynosi od 306.5 m/s przy temp. -40°C do 355.3 m/s przy $+40^{\circ}\text{C}$. Przy temperaturze 20°C dźwięk roz-

chodzi się z prędkością 343,8 m/s co daje 1237.68 km/h (dlatego organy i inne instrumenty dęte zmieniają swój strój ok. 3 centy na 1°C). W stali prędkość dźwięku jest około 16 razy większa niż w powietrzu. Szybkość rozchodzenia się fal akustycznych nie zależy od częstotliwości. Pochodzący od Arystotelesa pogląd, jakoby wysokie dźwięki rozchodziły się szybciej, niż niskie, został obalony jeszcze w czasach starożytnych. Dźwięk był obiektem badań wielu naukowców. W czasach nowożytnych wielu badaczy pracowało nad teorią fali dźwiękowej. Najważniejszym z nich był angielski fizyk Tomasz Young.

Wrażenia słuchowe

- Ton prosty – fala dźwiękowa sinusoidalna o jednej ściśle określonej częstotliwości.
- Dźwięk – drgania okresowe, powstające ze złożenia kilku tonów. Ton o najniższej częstotliwości to ton podstawowy – decyduje on o wysokości dźwięku.
- Częstotliwości harmoniczne (składowe harmoniczne) – tony o częstotliwości stanowiącej wielokrotność częstotliwości podstawowej,
- Szmer, szum – to drgania nieokresowe o różnych częstotliwościach i różnej amplitudzie,
- Hałas to zjawisko dźwiękowe, które w danych okolicznościach jest niepożądane, szkodliwe lub przeszkadzające odbiorcom.



Podział dźwięków

Źródłem dźwięku są ciała wprawione w drgania, mogą to być struny głosowe, słupy powietrza, membrany, struny itp.

Podstawowe parametry fali akustycznej

Wysokość dźwięku

Jest to atrybut wrażenia słuchowego zgodnie z którym porządkujemy dźwięki na skali muzycznej. Subiektywny odbiór wysokości dźwięku nie jest identyczny z pomiarami częstotliwości. Jest oczywiście uzależniony od częstotliwości bodźca, ale również od jego amplitudy, kształtu, obwiedni i innych dźwięków otoczenia. Badania nad percepcją wysokości tonu wykazały, że ludzie nie są w stanie dokładnie określić częstotliwości. Jedynie w przypadku porównywania dwóch wysokości jesteśmy w stanie określić ich różnicę. Jeśli dźwięki mają powyżej 5 kHz, wówczas percepcja wysokości jest mocno zaburzona.

Wysokość dźwięku jest jednak ściśle powiązana z częstotliwością fali dźwiękowej, dlatego w dalszych rozważaniach będziemy się posługiwać częstotliwością jak miarą wysokości dźwięku.

Częstotliwość dźwięku jest mierzona w ilości drgań na jednostkę czasu, najczęściej na sekundę. Jednostką częstotliwości jest herc [Hz]. Im tych drgań jest więcej, to dźwięk jest wyższy.

Dźwięki, ze względu na ich częstotliwość, dzieli się na:

- infradźwięki – poniżej 16 Hz,
- zakres słyszalny przez ludzi – od 16 Hz do 20 kHz – (wraz z wiekiem zakres ten zmniejsza się, szczególnie dla wysokich częstotliwości),
- ultradźwięki – powyżej 20 kHz,
- hiperdźwięki – powyżej 100 MHz.

Głośność dźwięku

Jest to subiektywny parametr i zależy od amplitudy i częstotliwości drgań ośrodka. Poziom głośności jest wyrażany w fonach, a poziom natężenia dźwięku oraz poziom ciśnienia akustycznego wyrażamy w decybelach.

Zakres zmian ciśnień fal akustycznych odbieranych przez ucho człowieka mieści się w przedziale od 20 μPa do 1 hPa, co obejmuje 8 rzędów wielkości, dlatego wygodniej jest używać skali logarytmicznej, która dość dokładnie odpowiada fizjologii słyszenia. Czułość ucha ludzkiego jest zależna od częstotliwości dźwięku i indywidualnych cech osoby, ale przyjmuje się, że dla częstotliwości 1000 Hz próg słyszalności (I_0) wynosi 10^{-12} W/m^2 , a to odpowiada 20 μPa ciśnienia akustycznego (P_0). Naukowcy badający zmysł słuchu podają, że błona bębenkowa ucha, przy progu słyszalności, wychyla się ok. 10^{-10} m . Jest to wielkość odpowiadająca rozmiarowi atomu wodoru.

Amplitudę fali akustycznej można opisać poprzez natężenie, które wyraża energię przenoszoną w ciągu sekundy [J/s] przez powierzchnię jednostkową. Natężenie jest proporcjonalne do kwadratu zmian ciśnienia. Dla zobrazowania zmian używa się skali logarytmicznej, która wyraża iloraz dwóch wielkości: zmierzonej i progowej.

Poziom natężenia dźwięku (L) wyrażony w decybelach to porównanie wielkości energii fali akustycznej (I) [W/m^2] do wartości progowej czułości ludzkiego ucha (I_0). Jest to wielkość:

$$L = 10 \log_{10} (I/I_0) \text{ [dB]}$$

Powszechniej stosuje się podawanie poziomu ciśnienia akustycznego dźwięku (SPL), wówczas liczba decybeli będzie wynikać z wzoru:

$$L = 20 \log_{10} (P/P_0) \text{ [dB SPL]}$$

Poziom ciśnienia akustycznego jest bardzo często określany natężeniem lub poziomem dźwięku, co często prowadzi do pomyłek w obliczeniach.

Decybel nie jest jednostką fizyczną, to umowna reprezentacja wielkości fizycznej przy wykorzystaniu funkcji logarytmicznej. Wzrost o 10 dB postrzegany jest jako podwojenie głośności, a matematycznie dodanie dwóch identycznych źródeł zwiększy poziom głośności o 3 dB.

Źródła dźwięku (hałas) Przykłady z odległością	Ciśnienie akustyczne Poziom L dB SPL
Samolot odrzutowy w odległości 50 m	140
Próg bólu	130
Próg dyskomfortu	120
Piła łańcuchowa, odległość 1 m	110
Dyskoteka, 1 m od głośnika	100
Ciężarówka z silnikiem Diesla, 10 m dalej	90
Krawężnik ruchliwej drogi, 5 m	80
Odkurzacz, odległość 1 m	70
Mowa konwersacyjna, 1 m	60
Przeciętny dom	50
Cicha biblioteka	40
Cicha sypialnia w nocy	30
Tło w studiu telewizyjnym	20
Szeleszczące liście w oddali	10
Próg słyszalności	0

Przykłady natężenia dźwięku

Jeśli ciśnienie akustyczne jest równe ciśnieniu atmosferycznemu, wówczas osiąga swoje maksimum, które wynosi 194 dB SPL.

$$L = 20 \log (101\,325 / 0,000\,02) = 194 \text{ dB SPL.}$$

Gdzie:

średnie ciśnienie powietrza = 101 325 Pa

próg słyszalności = 0,000 02 Pa

Barwa dźwięku

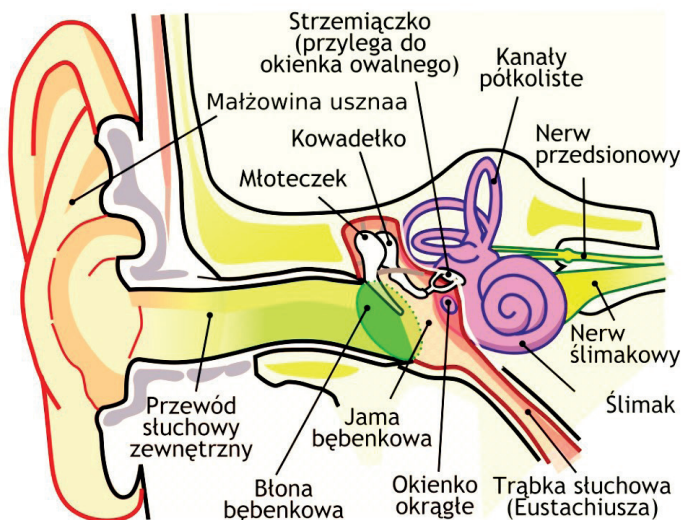
Jest to parametr zależny od kształtu fali dźwiękowej. Uzależniony jest od ilości, rodzaju i natężenia składowych harmonicznych i nieharmonicznych, czyli jest związana ze spektrum harmonicznym. W codziennym życiu można spotkać wiele dźwięków, które mogą mieć tę samą głośność i wysokość, ale odbieramy je jako różne, dzięki różnicy w ich barwie. Ludzkie ucho jest wyczułone na ten parametr. To właśnie barwa pozwala nam rozróżniać głos różnych osób, a w muzyce rozpoznawać instrumenty. Terminem bliskoznacznym dla barwy dźwięku jest brzmienie. Okazuje się, że w procesie rozróżniania barwy bardzo ważny jest przebieg czasowy dźwięku. Jego narastanie, wybrzmiewanie i wygaszanie pozwala na bardzo dokładne rozróżnianie instrumentów. Złożoność docierających do słuchacza dźwięków wpływa na subiektywne odczucie barwy. Istnieje zależność między psychologicznym terminem barwa dźwięku a fizycznym widmem, jednak nie są one równoważne.

Słyszenie – budowa ucha

Ludzkie ucho to bardzo skomplikowany organ, mający przekształcić fale dźwiękowe w impulsy nerwowe, które będą odbierane i analizowane przez mózg. Słuch przetwarza bodźce akustyczne na użyteczną informację. Odbiera fale dźwiękowe w zakresie 16 – 20 000 Hz i natężeniach pozostających w stosunku 1 – 1 000 000 000.. Dodatkowo funkcjonuje jak analizator częstotliwości rozróżniając odcienie barwy dźwięku, a także potrafi uporządkować dźwięki pod względem wysokości i lokalizować położenie ich źródła.

Ucho składa się z ucha zewnętrznego, środkowego i wewnętrznego.

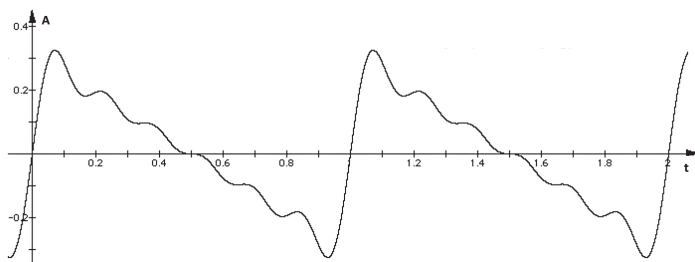
Fala akustyczna docierająca do ucha zewnętrznego powoduje drgania błony bębenkowej, które poprzez „transformator dopasowujący” złożony z trzech kosteczek są przenoszone do ślimaka wypełnionego płynem. W ślimaku następuje analiza częstotliwości i rozłożenie dźwięków na składowe, które pobudzają receptory przetwarzające drgania na impulsy nerwowe wysyłane do mózgu.



Budowa ucha

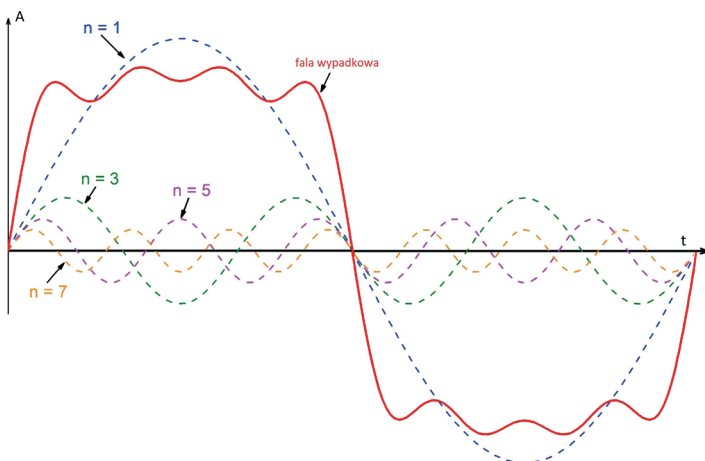
Pomiary dźwięku

Jeśli na drodze fali dźwiękowej ustawimy urządzenie mierzące zmiany ciśnienia, to otrzymamy wykres wartości ciśnienia w czasie:



Przykładowy wykres ciśnienia w funkcji czasu

Fale dźwiękowe mowy i muzyki swoim przebiegiem różnią się bardzo od prostych fal sinusoidalnych, jednak niezależnie od stopnia skomplikowania przebiegu fali, można ją rozłożyć na składowe sinusoidalne o odpowiednich częstotliwościach, amplitudach i fazach. Rozłożenie to nazywamy szeregiem harmonicznym. Odkrywcą tego zjawiska był Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830), a matematyczny wzór na obliczanie tych składowych nazywamy transformatą Fouriera.



Przykład rozłożenia fali wypadkowej na składowe harmoniczne

Częstotliwości kolejnych harmonicznych policzymy mnożąc częstotliwość podstawową f_1 przez kolejne liczby całkowite.

$$f_n = n * f_1$$

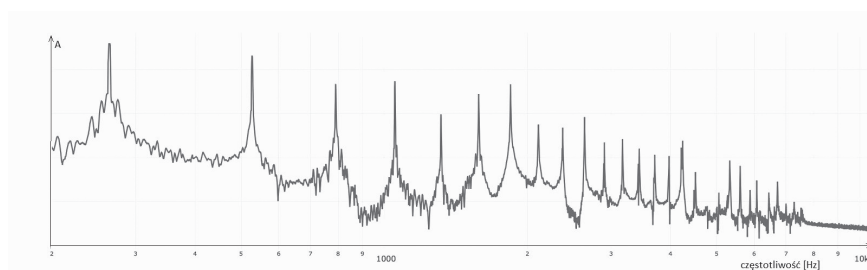
Gdzie:

f_n – częstotliwość n-tej składowej,

f_1 – częstotliwość podstawowa, pierwsza harmoniczna,

n – dodatnia liczba całkowita.

Składowe harmoniczne można przedstawić również za pomocą wykresu amplitudy w funkcji częstotliwości, zwanym wykresem widmowym. Dzięki przedstawieniu dźwięku za pomocą wykresu widmowego otrzymamy przejrzysty obraz wysokości składowych i ich amplitud.



Widmo dźwięku struny c

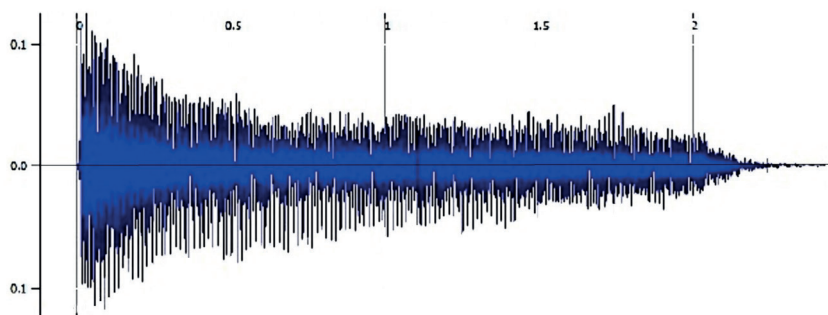
Muzycy, zamiast terminu składowe harmoniczne, posługują się określeniem alikwoty. Alikwoty, czyli tony składowe dźwięku, mogą nie stanowić dokładnej wielokrotności składowej podstawowej. Numerowanie alikwotów powinno być takie same jak składowych harmonicznych, czyli ton podstawowy to pierwsza składowa harmoniczna i pierwszy alikwot, druga harmoniczna to drugi alikwot itd., jednak muzycy bardzo często pierwszym alikwotem nazywają drugą harmoniczną, czyli oktawę wyżej, a drugim alikwotem trzecią składową, czyli alikwot kwintowy itd. Często trzeba uszczegółowić, którą składową mamy na myśli.

Nakładanie się fal (interferencja)

W praktyce nie występują pojedyncze fale sinusoidalne, zwykle w ośrodku występują fale złożone, albo wiele różnych fal akustycznych. Te wszystkie fale wpływają na ruch cząsteczek ośrodka, a w efekcie powstaje wypadkowy przebieg będący sumą tych wszystkich składowych. Niektóre fale będące w przeciwnej fazie osłabiają się wzajemnie, a inne, o fazach zgodnych wzmacniają swoją amplitudę. Gdy nakładają się fale o niewielkiej różnicy częstotliwości, wówczas następuje wzmacnianie i osłabianie fali wypadkowej, które określamy „dudnieniem”. O dudnieniach szczegółowo piszę w dalszej części.

Obwiednia fali

Amplituda fali akustycznej zwykle zmienia się w czasie. W momencie dostarczania energii wzrasta amplituda fali (nabrzmiwanie). Fala rozchodząca się w ośrodku traci energię na tarcie i coraz większą powierzchnię, dlatego jej amplituda się zmniejsza i w końcu zanika (wybrzmiewanie). Również zmiana dostarczanej energii do źródła powoduje zmianę amplitudy. Krzywa łącząca szczyty przebiegu fali jest nazywana obwiednią. Wykresy obwiedni w bardzo obrazowy sposób pokazują dudnienia.



Przykład obwiedni dźwięku fortepianu

Zjawiska zachodzące w strunie

Drgania struny

Struna jest to długi sprężysty materiał zamocowany na obydwu końcach poddany siłom rozciągającym. W strunie, która została odchylona od stanu spoczynkowego i zwolniona, odkształcenie będzie rozchodzić się w obie strony w postaci fali sprężystej, która po odbiciu od końców interferuje ze sobą, a w efekcie powstają drgania poprzeczne w postaci fali stojącej. Częstotliwość oscylacji zależy od masy struny i siły naciągu. Drgająca struna pobudza cząsteczki powietrza, które ją otaczają i jako fala dźwiękowa dociera do ucha.

Najniższa częstotliwość generowana przez drgającą strunę nazywamy tonem podstawowym, lub pierwszą harmoniczną. W strunie pojawiają się również wyższe drgania harmoniczne, nieharmoniczne oraz szum.

Wysokość dźwięku wytwarzanego przez strunę zależy od kilku parametrów. Przede wszystkim od jej długości mierzonej pomiędzy punktami zaczepienia oraz prędkości rozchodzenia się fali poprzecznej w strunie. Prędkość ta jest zależna od siły naciągu struny oraz jej masy jednostkowej. Możemy zapisać relację łączącą częstotliwość ze wszystkimi wyżej wymienionymi parametrami:

Prędkość rozchodzenia się fali poprzecznej w strunie zależy od masy jednostkowej $[\mu]$ i siły rozciągającej $[F]$.

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Masa jednostkowa to iloczyn gęstości $[\rho]$ i pola przekroju struny $[S=\pi r^2]$
 Częstotliwość to iloraz prędkości i długości fali:

$$f = \frac{v}{\lambda}$$

Długość fali stojącej w strunie to podwojona długość struny $[\lambda=2L]$
 stąd wzór na częstotliwość drgań struny:

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho S}}$$

Gdzie:

f_n – wysokość dźwięku n-składowej wydawanego przez strunę,
 n – liczba całkowita oznaczająca składową harmoniczną (1,2,3...)
 L – długość drgająca struny,
 F – siła naciągu,
 ρ – gęstość materiału,
 S – przekrój poprzeczny struny

Przykład:

$L = 0,5$ [m]
 $\mu = 0,01$ [kg/m]
 $F = 650$ [N]

$$f_1 = \frac{1}{2 * 0,5} \sqrt{\frac{650}{0,01}} = 254,95 \quad \left[\frac{1}{m} \sqrt{\frac{\frac{m * kg}{s^2}}{\frac{kg}{m}}} = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{1}{s} = Hz \right]$$

Z tego wzoru wynika, że ta sama struna skrócona o połowę wygeneruje częstotliwość dwa razy wyższą. Gdy chcemy podwoić częstotliwość drgań struny tylko zmieniając siłę naciągu, to potrzeba zwiększyć tę siłę 4 krotnie. Czterokrotne zmniejszenie przekroju poprzecznego struny, albo gęstości materiału, również podwoi częstotliwość drgań. Do czterokrotnego zmniejszenia przekroju struny potrzeba zmniejszyć o połowę jej średnicę. Czasem zastanawiamy się ile wzrośnie siła naciągu struny, gdy podniesiemy strój o pół tonu.

$$f_2 = f_1 * \sqrt[12]{2}$$

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{F_2}{F_1}}$$

$$F_2 = F_1 * \sqrt[6]{2} = F_1 * 1,122462\dots$$

Dla podniesienia stroju o pół tonu potrzeba zwiększyć siłę naciągu struny o 12,25%.

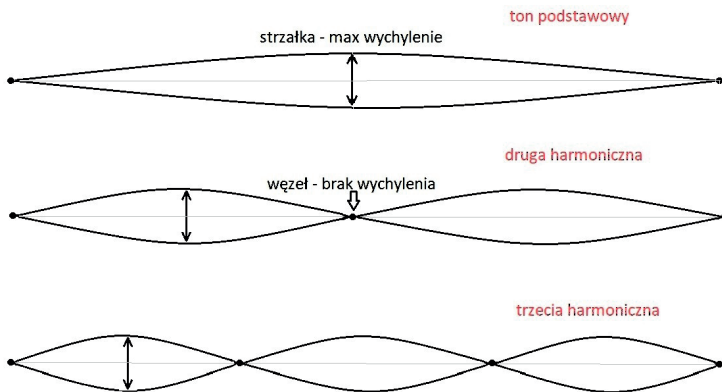
Te podstawowe wzory zakładają, że struna jest doskonale giętka.

Długość fali generowanej w strunie znacząco odbiega od długości fali dźwiękowej w powietrzu. Wynika to z różnicy prędkości rozchodzenia się fal w tych ośrodkach. Dlatego struny o tej samej długości generują różne częstotliwości w zależności od pozostałych parametrów. Masa struny, poza częstotliwością, wpływa na głośność i czas wybrzmiewania.

Składowe harmoniczne

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) dokonał analizy funkcji okresowej i udowodnił, że każdy przebieg okresowy można rozłożyć na składowe harmoniczne o przebiegu sinusoidalnym. Ten ciąg składowych nazywamy szeregiem Fouriera.

Składowe harmoniczne to drgania sinusoidalne o częstotliwościach będących wielokrotnością częstotliwości podstawowej.



Ton podstawowy, harmoniczne i punkty charakterystyczne fali

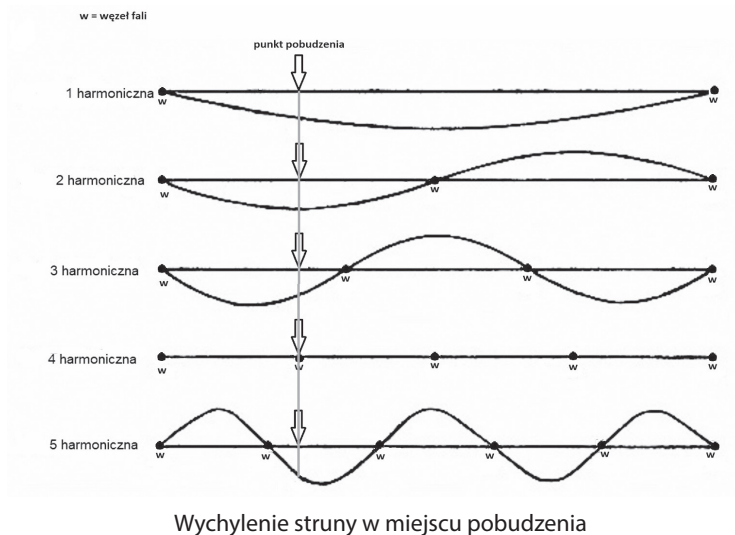
Alikwot to każda częstotliwość rezonansowa w widmie dźwięku. Jak wspomniałem na str. 20, numerowanie szeregu alikwotów powinno rozpoczynać się od tonu podstawowego. Nawet jeśli dźwięk nie zawiera jakichś składowych harmonicznych – numeruje się je tak, jakby one występowały. W praktyce muzycznej przyjęło się nazywać pierwszym alikwotem drugą harmoniczną i kolejne alikwoty są przesunięte o jeden w stosunku do harmonicznych, co powoduje sporo nieporozumień. Muzycy grający na instrumentach strunowych wydobywają tony alikwotowe przy pomocy flażoletów. Technika flażoletów polega na delikatnym tłumieniu drgań struny w miejscu, gdzie znajduje się węzeł fali. Stłumią się wszystkie drgania tego miejsca, a wyeksponujemy odpowiedni alikwot. Np. stłumienie drgań w połowie długości struny spowoduje pozostawienie alikwotu oktawowego (czyli drugiej harmonicznej), flażolet w $1/3$ długości struny spowoduje, że usłyszymy alikwot kwintowy (trzecią harmoniczną) itd. W rzeczywistych strunach częstotliwość kolejnych alikwotów jest trochę wyższa niż wyliczona harmoniczna. To zjawisko określamy nieharmonicznością (inharmonią, Inharmonicity).

Prawa Younga

Thomas Young (1773 – 1829) na przełomie XVIII i XIX wieku badał właściwości różnych materiałów. Dokonał odkryć z różnych dziedzin nauki, ale nas interesują jego badania modułu sprężystości i rozkładu drgań w strunie.

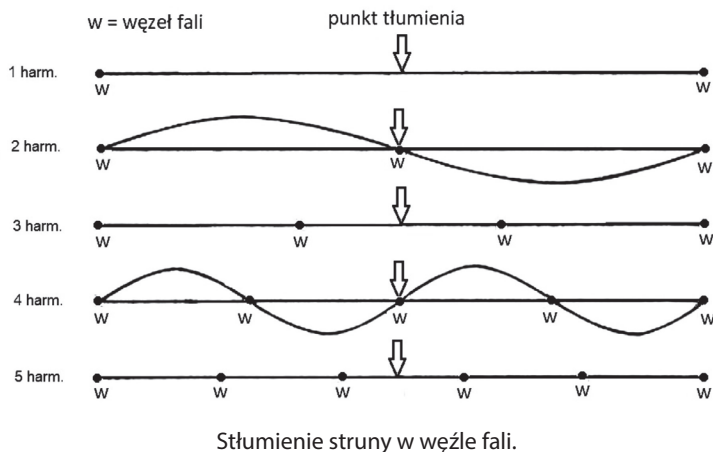
Pierwsze prawo Younga – *struna nie może wykonywać takich drgań, których węzeł przypada w punkcie pobudzenia struny.*

W fortepianach pierwsze prawo Younga ma praktyczne zastosowanie w niskich i środkowych rejestrach. Młotki pobudzają struny w $1/8$ jej długości, przez to ósma harmoniczna nie jest generowana, ale również zmniejszają się amplitudy siódmej i dziewiątej harmonicznej, które dysonują z dźwiękami w stroju równomiernie temperowanym.



Drugie prawo Younga – jeśli drgania struny zostaną w sposób sztuczny stłumione w jakimś punkcie, struna może wykonywać tylko takie drgania, których węzeł przypada w miejscu stłumienia struny.

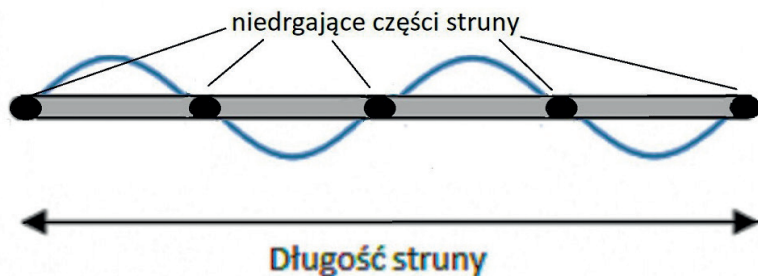
To zjawisko jest wykorzystywane do wydobywania flażoletów.



Z tych praw Younga wynika, że najskuteczniejsze tłumienie strun nastąpi, gdy będziemy tłumić strunę w okolicach punktu pobudzania.

Zjawisko nieharmoniczności

Rzeczywista struna posiada swoją naturalną sztywność, która wzrasta proporcjonalnie do jej napięcia i kwadratu średnicy, a maleje proporcjonalnie do wzrostu długości. Struny krótkie, grube i mocno naprężone wykazują większą sztywność. Z tego powodu częstotliwość kolejnych składowych generowanych w strunie jest nieznacznie wyższa od matematycznie policzonych. Interwały między kolejnymi alikwotami przekraczają nieznacznie oktawę, kwintę, tercję itd. Im struna sztywniejsza, tym większe są te odchyłki.



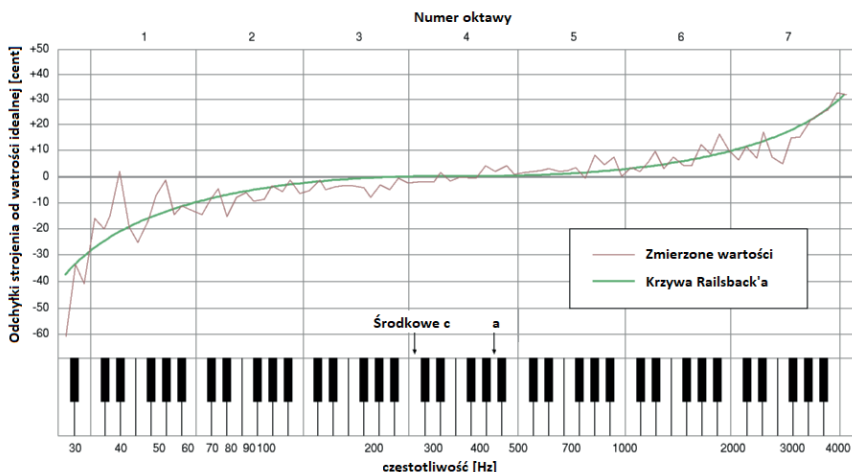
Węzły fali nie są punktami, ale są odcinkami struny, która przez swoją sztywność nie wychyla się, skracając drgającą część, a to powoduje wyższą częstotliwość tak powstających dźwięków.



Dr Ora L. Railsback

Zjawisko nieharmoniczności badał w latach 30. XX w. dr Ora L. Railsback z Uniwersytetu w Illinois.

Przy pomocy skonstruowanego przez siebie chromatycznego stroboskopu mierzył częstotliwości nastrojonych fortepianów i pianin. Efektem jego badań jest krzywa Railsbacka.



Krzywa Rainsbacka (strojenia).

Inharmonii nie usłyszymy, to zjawisko uchwycimy tylko podczas pomiarów i stąd wiele nieścisłości, uproszczeń i błędnych wniosków wśród stroiciele fortepianów. Czyste interwały strojne na słuch nie powinny dudnić. Powinny być maksymalnie czyste. Dopiero po zmierzeniu szybkości drgań zobaczymy, że częstotliwości wyższych dźwięków są większe niż wynikałoby to z prostych obliczeń.

Naukowcy opisali ten efekt matematycznie:

$$f_n = n * f_0 * \sqrt{(1 + Bn^2)}$$

Gdzie:

$n = 1, 2, 3...$

f_0 – częstotliwość podstawowa

B – współczynnik inharmoniczności, który zależy od: długości, średnicy, napięcia i właściwości materiałowych struny. W fortepianie wartość B waha się typowo pomiędzy 0,00008 dla cieńszych strun basowych do 0,015 dla najwyższych strun dyszkantowych.

W Polsce badania nad nieharmonicznością strun w fortepianie prowadził Jacek Guzowski i to z jego pracy zaczerpnąłem rzeczywiste pomiary. Jacek Guzowski mierzył częstotliwości podstawowe i składowe harmoniczne każdego dźwięku w fortepianie koncertowym. Fortepian był strojony przez różnych stroiciele.

harmoniczna	Pomiar I	obliczone	różnica	Pomiar II	obliczone	różnica
podstawowa	54,59	54,59	0	55,13	55,13	0
druga	109,35	109,18	0,17	110,45	110,26	0,19
trzecia	164,04	163,77	0,27	165,69	165,39	0,30
czwarta	218,72	218,36	0,35	220,91	220,52	0,39
piąta	273,25	272,95	0,29	275,99	275,65	0,34
szósta	327,95	327,54	0,40	331,24	330,78	0,46
siódma	383,01	382,13	0,88	386,85	385,91	0,94
ósma	438,52	436,72	1,79	442,92	441,04	1,88
dziwięta	492,81	491,31	1,48	497,75	496,17	1,58
dziesiąta	547,59	545,9	1,69	553,10	551,30	1,80
jedenasta	602,28	600,48	1,80	608,34	606,43	1,91
dwunasta	661,66	655,08	6,58	668,3	661,56	6,74
trzynasta	712,84	709,67	3,15	719,99	716,69	3,30
czternasta	767,83	764,26	3,57	775,56	771,82	3,74

Częstotliwości [Hz] kolejnych harmoniczných dźwięku A1 (13 klawisz) zmierzone po różnych strojeniach.

W powyższej tabeli widzimy jak rzeczywiste częstotliwości odbiegają od wyliczonych matematycznie harmoniczných.

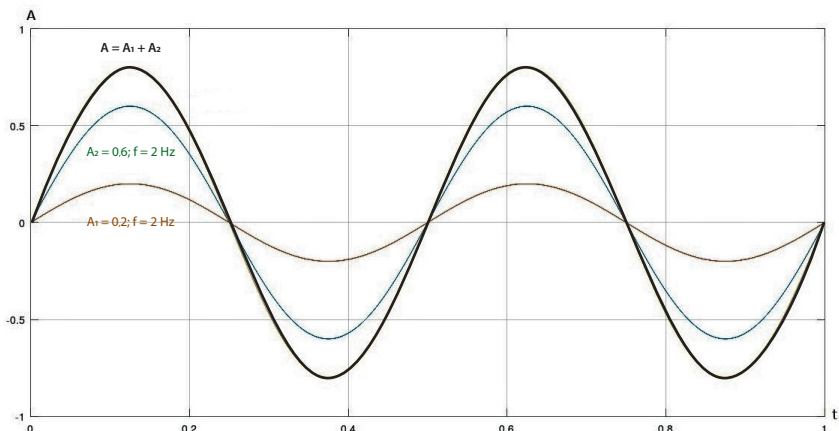
Nieharmoniczność to dość skomplikowane zjawisko, każda struna ma swoje indywidualne odchylenia wybrzmiewania poszczególných składowých, dlatego nie jest wskazane przenoszenie pomiarów z jednego instrumentu na inny, nawet gdy są tego samego modelu.

Dudnienia

Dudnienia są podstawą pracy stroiciela, więc poświęcę temu zjawisku więcej uwagi.

Sumowanie się kilku fal sinusoidalnych w ośrodku (interferencja, superpozycja) daje przebiegi o złożonym kształcie, zależnym od kierunku, częstości, fazy i amplitudy. Wszystkie fale podlegają tym samym prawom, dudnienia nie są zarezerwowane tylko dla fal akustycznych, jednak tutaj opisujemy zjawiska akustyczne, więc dudnienia będziemy analizować pod kątem akustycznym. Zobrazowanie tych zjawisk przedstawiam na wykresach w czasie jednej sekundy. Wykresy wygenerowane zostały przy pomocy programu *GNU Octave*.

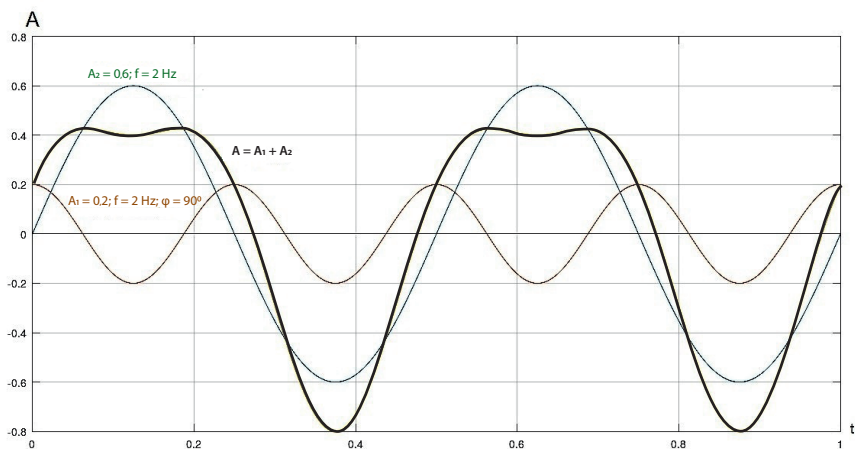
Spotkanie się dwóch fal o identycznej częstotliwości, fazie i kierunku spowoduje dodawanie się ich amplitud.



Przykład sumowania się dwóch fal o tym samym kierunku, fazie i częstotliwości.

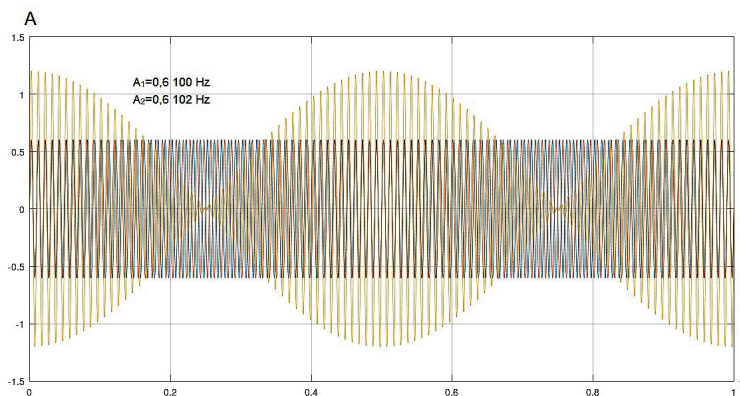
Jeśli fale będą różnić się fazą, albo kierunkiem, albo częstotliwością, wówczas fala wypadkowa będzie mieć amplitudę wynikającą z sumy chwilowych wartości przebiegów składowych. Oczywiście, jeśli do danej fali akustycznej dodamy identyczną falę, ale o odwróconej fazie, to nastąpi wygaszenie (wyzzerowanie) fal.

Uogólniając, fale akustyczne z wielu źródeł sumują swoje chwilowe amplitudy, tworząc falę wypadkową, która dociera do ucha.



Przy różnej częstotliwości, amplitudzie i fazie, wypadkowa fala ma bardziej złożony przebieg.

Jeśli dwa źródła generują tony różniące się o niewielką wartość częstotliwości, to w efekcie interferowania fal przesunięcie fazowe tych przebiegów będzie się zmieniać z okresu na okres i powstanie dźwięk o wahającej się amplitudzie. Te wahania usłyszymy jako pulsowanie głośności o częstotliwości równej różnicy generowanych tonów. Np. jeśli mamy dwa źródła generujące tony 100 i 102 Hz, to usłyszymy dudnienia 2 razy na sekundę. Amplituda fali wypadkowej oscyluje od sumy amplitud fal składowych, do ich różnicy. Kolejne wykresy są przedstawieniem przebiegów w czasie jednej sekundy, dlatego łatwo można policzyć liczbę dudnień w sekundzie.



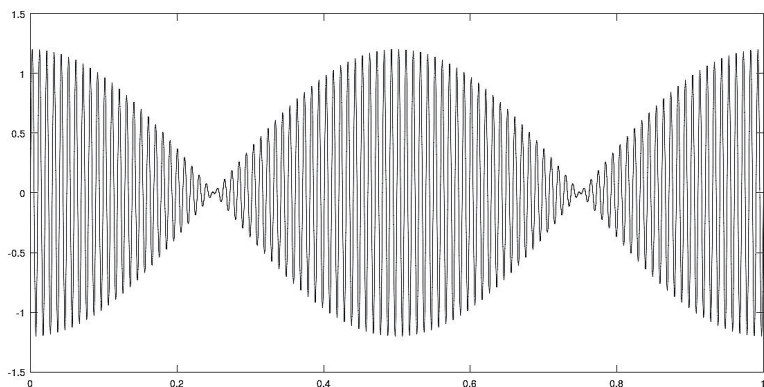
Wykres dwóch fal sinusoidalnych 100 Hz i 102 Hz, oraz ich suma

Interferencja dwóch fal f_1 i f_2 o niewielkiej różnicy częstotliwości spowoduje powstanie przebiegu o częstotliwości będącej średnią arytmetyczną tych dwóch wartości, oraz przebieg będący ich różnicą.

$$f_a = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

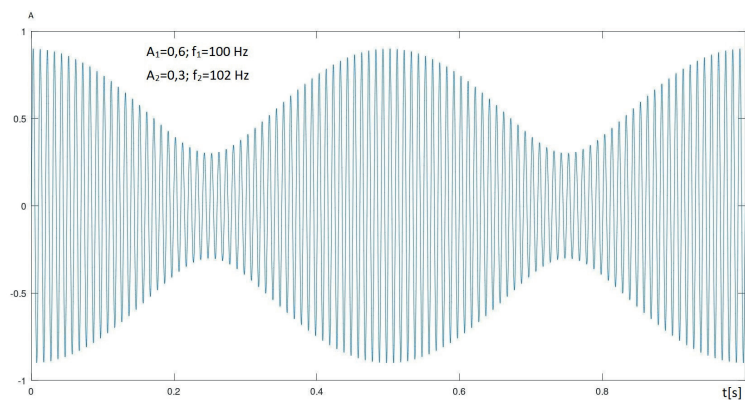
$$f_o = \frac{f_1 - f_2}{2}$$

W naszym przykładzie będzie to 101 Hz, a częstotliwość obwiedni to 1 Hz, jednak liczba słyszalnych dudnień będzie dwa razy większa, gdyż tak samo są słyszalne dodatnie jak i ujemne wychylenia obwiedni. Dlatego szybkość dudnień będzie równa różnicy częstotliwości składowych.



Wykres sumy dwóch fal sinusoidalnych 100 Hz i 102 Hz.

Przy interferencji fal różniących się amplitudą powstające dudnienia będą miały mniejszą głębokość, a częstotliwość wypadkowa będzie się zmieniać, ale będzie bliższa częstotliwości składowej o większej amplitudzie.



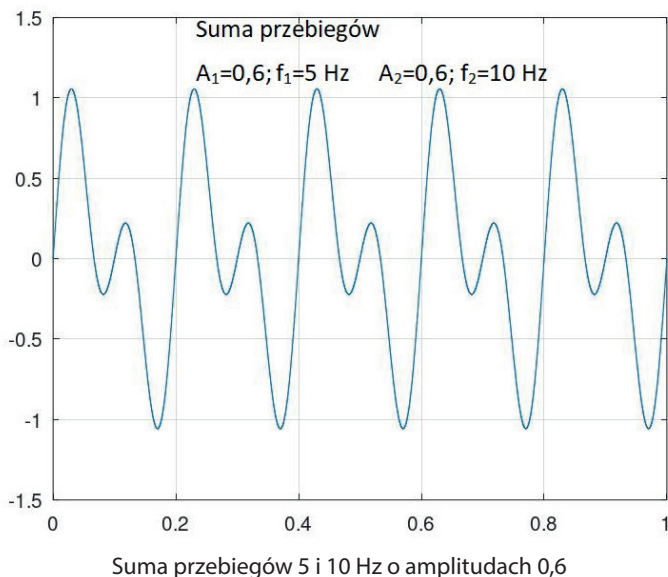
Suma dwóch fal 100 Hz i 102 Hz o różnych amplitudach.

Najmniejsza, słyszalna, częstotliwość dudnień jest w okolicach 0,1 Hz, czyli jedno dudnienie na 10 sekund. W praktyce można je określić „pływaniem”, albo „zawijaniem”. Najwyraźniej słyszymy dudnienia o częstości 1 – 15 Hz, powyżej tej granicy współbrzmienie staje się chrapliwe, szorstkie, a różnicę powyżej ok. 30 Hz przestajemy słyszeć jako dudnienia, a zaczynamy słyszeć dwa oddzielne dźwięki.

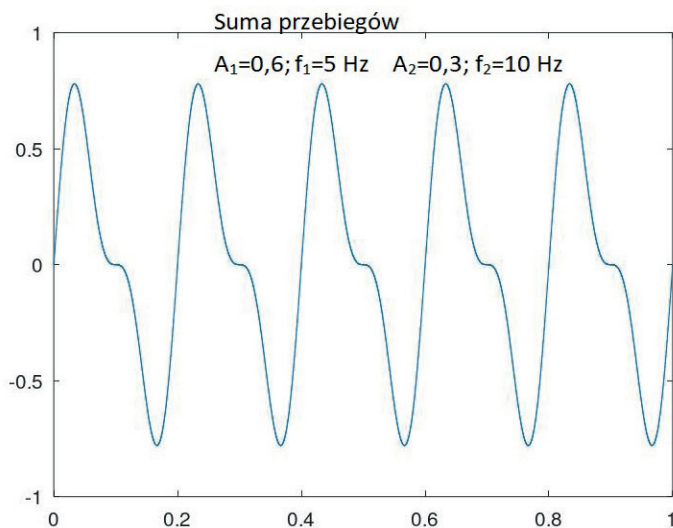
W najniższych oktavach dudnienia występują również pomiędzy dźwiękami różnych klawiszy. Różnica półtonu, całego tonu, czy nawet tercji to kilka (kilkanaście) herców. W takim współbrzmieniu usłyszymy dudnienia częstotliwości podstawowych. W oktawie kontra, dudnią wszystkie interwały mniejsze od kwinty, a w oktawie małej – półton i cały ton.

Zastanawiałem się, jak to jest, że słyszę dudnienia dźwięków w ich podstawowej wysokości, gdy naprawdę dudnią składowe harmoniczne. Przeprowadziłem matematyczną analizę przebiegów sinusoidalnych o dużej różnicy częstotliwości. Okazało się, że przebiegi sinusoidalne (niemające wyższych składowych) o różnicach częstotliwości 2:1, 3:1; 4:1; 5:1 przy niewielkim odstrojeniu również dudnią. Amplituda tych dudnień jest mniejsza niż przy częstotliwościach zbliżonych, ale gdy dodamy kilka wyższych składowych, wówczas te dudnienia są bardzo podobne.

Spójrzmy na sumę dwóch przebiegów 5 i 10 Hz o jednakowych amplitudach. Wypadkowy przebieg ma wybijające się impulsy o tej niższej częstotliwości, dlatego dźwięki oktawy 2:1 postrzegamy jako tożsame.

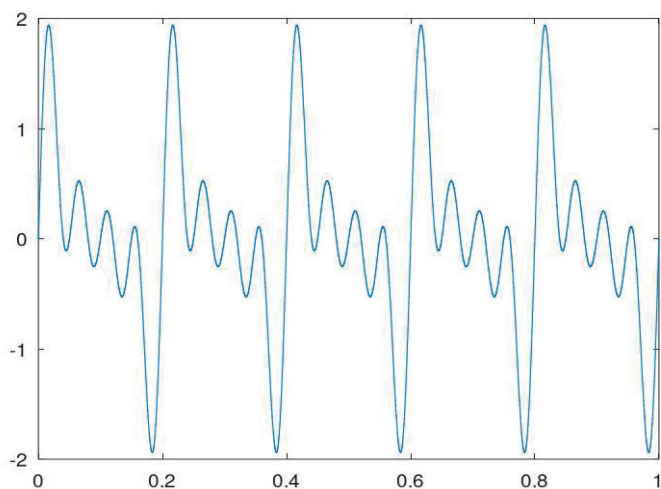


Przy zmniejszeniu o połowę amplitudy wyższej składowej zaobserwujemy „wtopienie się” jej w składową niższą i mocniejszą.



Suma przebiegów 5 i 10 Hz o amplitudach 0,6 i 0,3

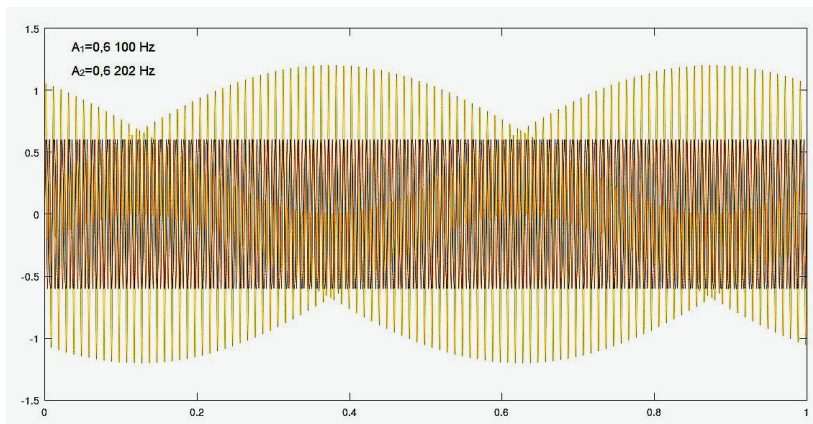
Dodanie kilku przebiegów o składowych pozostających w stosunku 1:2:3:4 o tych samych amplitudach daje również przebieg o częstotliwości najniższej.



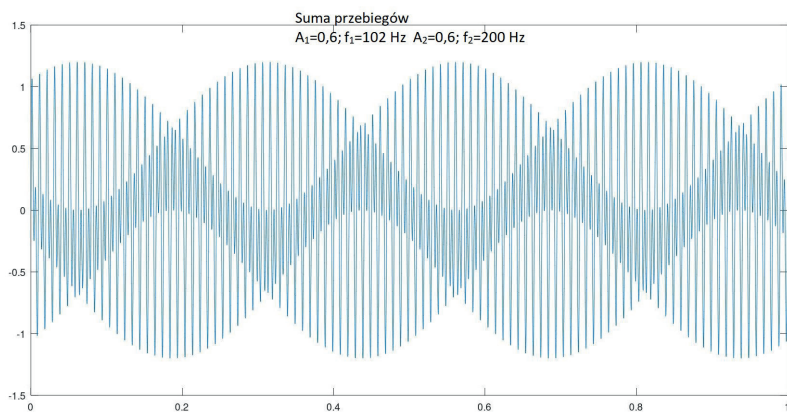
Suma fal 5 Hz; 10 Hz; 15 Hz i 20 Hz o takich samych amplitudach 0,6.

Dwa zsumowane przebiegi sinusoidalne o częstotliwościach 100 i 202 Hz dają wyraźne dudnienia dwa razy na sekundę, mimo braku drugiej harmo-

nicznej niższego tonu dudnienia występują pomiędzy nimi w takim tempie, który wynika z różnicy harmoniczných. Zmiana niższej częstotliwości o 2 Hz powoduje dudnienia 4 razy na sekundę.



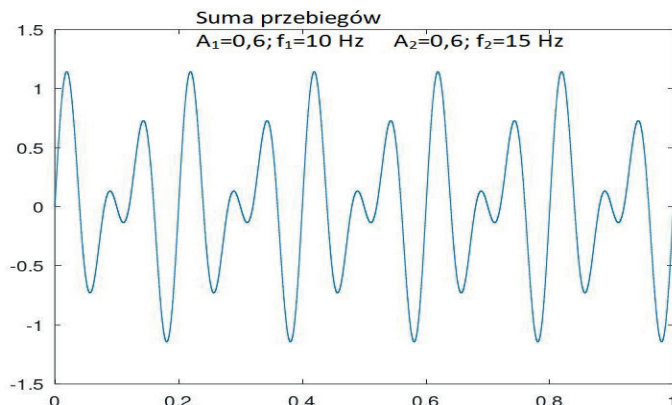
Wykres dwóch fal 100 Hz i 202 Hz, oraz ich suma



Suma dwóch fal 102 Hz i 200 Hz dudni 4 Hz

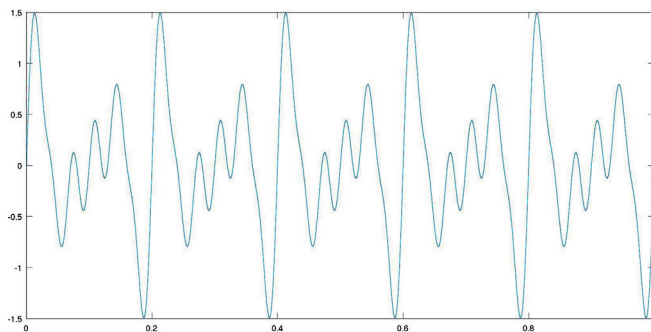
Dwie fale tworzące interwał kwinty o częstotliwościach w stosunku 3:2 sumują się w taki sposób, że powstaje przebieg o częstotliwości różnicy składowych.

Zobaczmy to na wykresie:



Suma przebiegów 10 i 15 Hz o amplitudach 0,6. Wyrażnie wybija się częstotliwość różnicy składowych 5 Hz

Dodanie do powyższych przebiegów drugiej składowej o amplitudzie zmniejszonej o połowę jeszcze bardziej eksponuje częstotliwość będącą różnicą składowych



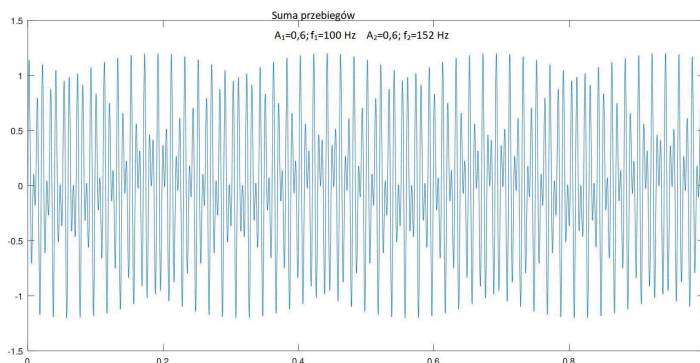
Przebieg wypadkowy sumy fal o częstotliwościach 10 Hz; 15 Hz; 20 Hz i 30 Hz przy czym amplitudy są 0,6 i 0,3

Powyższe wykresy dowodzą jak powstają dźwięki kombinacyjne (bas akustyczny). Czy nie rozpatrywać powstającego dźwięku kombinacyjnego jako efektu dudnienia o częstotliwości różnicy składowych? Przy niewielkich odstrojeniach, wypadkowa częstotliwość utworzona z interferencji dwóch źródeł dźwięku znajduje się pomiędzy nimi. Matematycznie powinna być to połowa ich sumy,

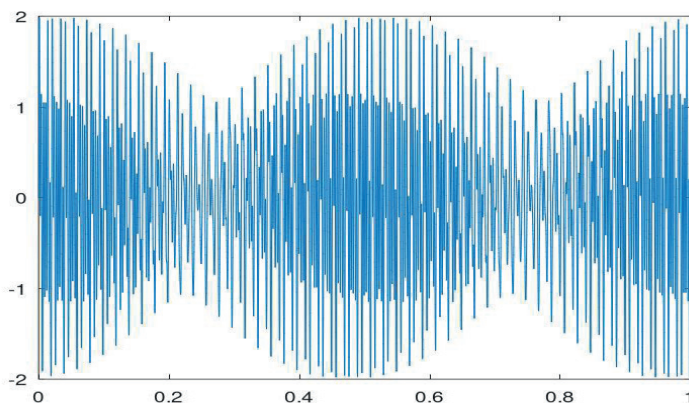
jednak przy wzroście różnicy częstotliwości coraz wyraźniej „rozszczepiają się” i słychać dwa dźwięki. Dodatkowo pojawia się dźwięk o częstotliwości różnicy tych częstotliwości, który nazywamy tonem kombinacyjnym, rezydującym albo wspólnym, wykorzystywanym m.in. w budowie organów jako bas akustyczny.

Przy niewielkich odstrojeniach kwinty podobnie jak w oktavach pojawiają się klasyczne dudnienia różnicy składowych harmoniczných. Dwie fale sinusoidalne o częstotliwościach 100 Hz i 152 Hz generują dudnienia 4 razy na sekundę, tak jakby dudniły trzecia składowa 100 Hz (równa 300 Hz) i druga składowa 152 Hz (czyli 304 Hz), które w tym badaniu nie występowały. Dodanie do badań odpowiednich przebiegów harmoniczných powoduje wyraźny wzrost dynamiki dudnień.

Wykres sumy fal sinusoidalnych 100 Hz, 151 Hz, 300 Hz i 302 Hz o tych samych amplitudach pokazuje bardzo wyraźne dudnienia o szybkości 2 Hz.



Dudnienia fal 100 Hz i 152 Hz o tej samej amplitudzie.

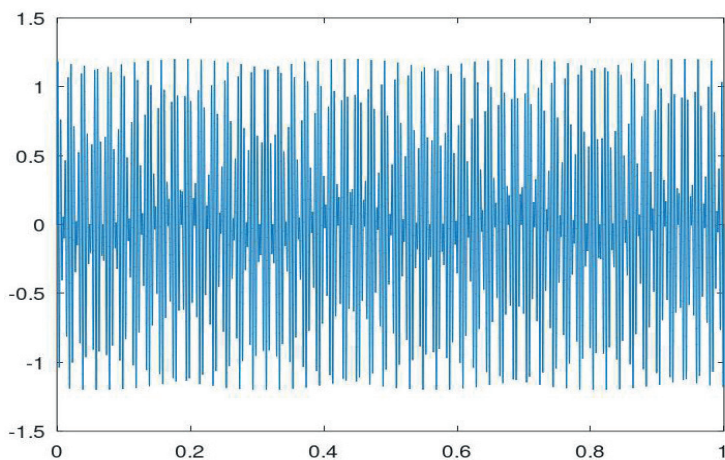


Suma fal 100 Hz; 151 Hz; 300 Hz i 302 Hz o tej samej amplitudzie.

Następnym interwałem, którym posługują się stroiciele jest tercja wielka. W tym interwale częstotliwości tercji naturalnej są w stosunku 5/4. Przy niewielkim odstrojeniu powinny być słyszalne dudnienia piątej składowej niższego tonu z 4 harmoniczną wyższego. W przypadku tercji c – e są to częstotliwości podstawowe około 262 Hz i 330 Hz. Dudniące harmoniczne mają 1310 Hz i 1320 Hz, a szybkość powstających dudnień to 10 Hz. Teoretyczne dudnienia występują na dźwięku e^2 , jednak słyszymy je na dźwiękach podstawowych, a nie dwie oktawy wyżej. Dudnienia zwykle słyszymy na wyższym dźwięku słuchanego interwału (w tym przykładzie na e). Ma to związek z psychofizycznymi właściwościami ludzkiego słuchu.

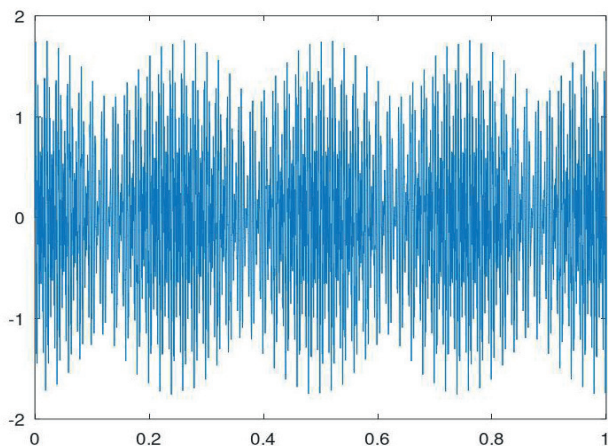
Dudnienia tercji są w rzeczywistości bardzo podobne do dudnień kwint, czy oktaw.

Na poniższych wykresach zostały pokazane dwa przykłady dudnienia tercji wielkiej.



Suma dwóch fal 200 Hz i 251 Hz dająca dudnienia 4 Hz

Jeśli dołożymy do tych dwóch przebiegów składowe, które powinny się zdudniać, czyli 1000 Hz i 1004 Hz, o mniejszej amplitudzie, to wypadkowa tych czterech sinusoid pokazuje bardzo wyraźne dudnienia.



Suma czterech fal 200; 251; 1000; 1004 Hz, dająca dudnienia 4 Hz

Przy różnych amplitudach sumujących się fal, zjawisko dudnienia będzie mniej słyszalne, gdyż głębokość „falowania” jest wypadkową różnicy amplitud fal składowych.

Sumowanie dwóch fal poruszających się w płaszczyznach prostopadłych badał i opisał Jules Antoine Lissajous (czyt. Lisażu). Krzywe wypadkowe powstające w wyniku nakładania się prostopadłych fal nazywamy figurami Lissajous. Dzięki tym badaniom można było dokładne stroić kamertony.

Modulacja amplitudy i częstotliwości

Cykliczna zmiana głośności tonu nazywana jest modulacją amplitudy (AM). Różni się od zjawiska dudnienia, choć w odbiorze jest bardzo podobna. W tym rodzaju modulacji występuje sygnał nośny (f_0) o stałej częstotliwości oraz sygnał modulujący amplitudę (f_m). W efekcie takiego zabiegu otrzymujemy „pulsowanie” głośności w takt sygnału modulującego. W muzyce to zjawisko nazywamy „tremollo”.

Modulacja częstotliwości zachodzi wówczas, gdy częstotliwość sygnału nośnego zmienia się w takt sygnału modulującego bez zmiany amplitudy. W muzyce modulacja częstotliwości występuje w efekcie zastosowania „vibrato”.

Fałszywe struny

Właściwie powinno się to nazywać fałszywe dudnienia strun. Zjawisko jest znane jako nieczyste brzmienie pojedynczej struny, która brzmiać sama – dudni. Takie struny zaturawiają przyjemność strojenia unisono, ale również zaburzają słuchanie dudnień wszystkich interwałów. Często nawet wymiana

struny niewiele pomaga i trzeba przyjąć to zjawisko jako dopuszczalne i dość powszechne. Fałszywe dudnienia strun są najwyraźniejsze w oktawach powyżej razkreślnej aż do najwyższych dźwięków fortepianu, oraz w niskich rejestrach, gdzie są struny z nawojem. Zwykle te dudnienia nie mają wpływu na ogólny odbiór muzyki granej na fortepianie, a nawet przez niektórych ludzi brzmienie zbyt czystych chórów postrzegane jest jako suche, lub inaczej sterylne.

Dlaczego pojedyncza struna dudni? Jest to spowodowane powstawaniem w rzeczywistej strunie składowych o minimalnie różniących się częstotliwościach. Np. piąta harmoniczna dzieli strunę na pięć kawałków, które samodzielnie generują pięć takich samych tonów składowych. Gdy z jakiegoś powodu nie wszystkie te fragmenty wygenerują ten sam ton, to będą interferować i usłyszymy dudnienia. Powodów takiego zachowania strun jest wiele:

- zmiana kształtu przekroju struny (przeciągnięcia), owalność, ugięcie,
- niejednorodne rozłożenie masy na całej długości, brud, rdza itp.,
- skręcenie struny wokół własnej osi,
- niestabilne mocowanie końców struny na mostku, agrafie, czy kapodastrze. Wychylenie struny w górę tworzy inną częstotliwość, niż wychylenie w dół,
- problemy rezonansowe płyty i mostka. Jeśli częstotliwość rezonansowa w danym miejscu płyty jest inna niż drgania struny, wówczas drgania płyty wpływają na strunę powodując zmiany częstotliwości,
- nieharmoniczność wyższych składowych,
- inne....

Oprócz fałszywych dudnień w pojedynczej strunie są fałszywe dudnienia podczas zestrzajania chórów. Również i w tym przypadku jest wiele powodów tego zjawiska:

- niedokładne dopasowanie powierzchni główki młotka do strun, co powoduje wzbudzenie fali o różnej fazie,
- różne długości strun, przez co składowe harmoniczne są nieco inne,
- różne grubości strun,
- różny punkt uderzenia młotka w struny chóru,
- różnice w sposobie nawoju strun basowych,
- niedokładne wytłumienie innych strun, które rezonują,
- inne...

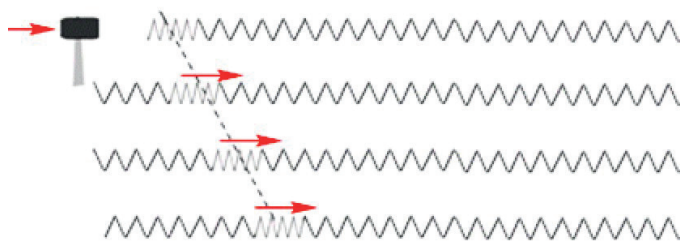
Najbardziej dokuczliwe fałszywe dudnienia występują w górnych rejestrach. Niedokładność nacięcia mostka w linii sztyftów rzędu 0,2 mm powoduje różnice

częstotliwości kilku herców, również niestabilny sztyft ma mostku nie utrzymuje tej samej długości struny podczas ruchu w górę i w dół.

Fala podłużna w strunie

Struna pobudzona uderzeniem młotka wytwarza falę poprzeczną, ale w strunie tworzą się również drgania podłużne.

Naprężona struna zachowuje się jak sprężyna i pobudzona drga również wzdłuż swojej osi.



Zobrazowanie podłużnych drgań.

Częstotliwość drgań podłużnych zależy od właściwości fizycznych struny i nie zależy od siły naciągu. Jest to częstotliwość własna struny. Te drgania podłużne zakłócają rozkład alikwotów w strunie dokładając się najczęściej pomiędzy 10, a 15 harmoniczną. Amplituda tych drgań zwykle nie jest wyższa od amplitudy „normalnych” alikwotów w tym rejonie. W strunach średnicy i dyszkantu te podłużne drgania lokują się ponad 4000 Hz i niewiele zmieniają w odbiorze całego dźwięku, jednak w rejestrach basowych i tenorowych, dźwięk generowany podłużną falą trafia w najlepszy zakres słyszalności i ma wpływ na ogólny odbiór wysokości dźwięku drgającej struny. Stroiciel, poprzez zmiany napięcia, stroi poprzeczne drgania struny ale nie ma żadnego wpływu na częstotliwości podłużnych drgań, ponieważ strojenie kołkami stroikowymi tego nie zmieni. Podłużne drgania strun mogą być zmienione tylko poprzez modyfikację struny. W przypadku strun nawijanych, drgania podłużne mogą być projektowane dwoma sposobami: albo poprzez zmianę długości grającej struny, albo przez zmianę wagi drutu nawojowego w stosunku do wagi rdzenia, więc strojenie podłużnych drgań jest ustalone (celowo albo przypadkowo) przez projektanta fortepianów i z praktycznego punktu widzenia nie może być zmienione po zbudowaniu instrumentu.

Ostatnie badania podłużnych drgań struny wykazały istnienie dwóch rodzajów tych fal. Jedne rezonansowe – wynikające z właściwości fizycznych struny oraz drugi rodzaj – wymuszony drganiami poprzecznymi.

W najniższych strunach basowych w fortepianie, gdzie powinniśmy usłyszeć głębokie niskie tony, dużo większą amplitudę mają składowe wyższego rzędu, które nasze uszy składają i „budują” ton podstawowy. Jeśli do tych składowych poukładanych w kolejne alikwoty wkłada się częstotliwość drgań podłużnych, to zakłóci ona ogólny odbiór dźwięku struny jako całości.

Weźmy np. dźwięk C_1 (4 klawisz). Jego częstotliwość podstawowa to np. 32 Hz. Harmoniczne od 10 do 14, to teoretycznie 320, 352, 384, 416, 448 Hz. Gdzieś w tym rejonie pojawia się częstotliwość „podłużna” i gdy ma ona np. 370 Hz, to nasze ucho przesunie odczucie wysokości w kierunku fis, czyli mocno zafałszuje. Możemy to zjawisko usłyszeć, gdy na najniższych klawiszach chcemy zagrać jakąś znaną melodię – mimo poprawne nastrojonych strun, melodia wychodzi fałszywa. Najpiękniej byłoby, aby te podłużne drgania współbrzmiały z alikwotami danego dźwięku, ale częstotliwość drgań poprzecznych stroimy poprzez zmianę siły naciągu, a drgania podłużne zostają na stałej wysokości i zmienić je możemy tylko poprzez zmianę struny. W dodatku dla drgań podłużnych mostek i agrała nie są sztywną barierą.

Sposób nawijania strun basowych, w których dokładnie można zaplanować częstotliwość drgań podłużnych został opatentowany w 1967 roku.

Tutaj jest opisany ten patent:

<http://www.google.com/patents/US3523480?hl=pl>

Dźwięki w muzyce

Konsonanse i dysonanse

Konsonansem nazywamy brzmienie dwóch dźwięków, które uznajemy miłe dla ucha, a dysonans to brzmienie odbierane jako nieprzyjemne. Pitagoras, badając matematyczne zasady opisujące muzykę, uważał, że interwał jest tym bardziej konsonansowy, im mniejszymi liczbami wyraża się stosunek długości odpowiadających im strun. W skali konsonansowości Pitagorasa najwyżej są pryma i oktawa, następnie kwinta i кварта, kolejna, to sekunda wielka i seksta mała, dalej septyma wielka i sekunda mała itd. Tercja wielka i mała oraz seksta wielka w czasach Pitagorasa była uważana za dysonans.

Dopiero od średniowiecza, pojawienie się muzyki wielogłosowej i akordów zbudowanych w oparciu o interwał tercji i seksty, spowodowało zmianę postrzegania konsonansowości dźwięków. Wówczas to tercje i seksty uznane zostały za konsonanse niedoskonałe, zaraz za kwintą i kwartą, a sekundy, septymy i tryton uznano za dysonansowe. Dwa dźwięki uznamy za miłe dla ucha (konsonansowe) gdy niektóre składowe harmoniczne będą się pokrywały. Im więcej tonów składowych jest wspólnych, tym większy konsonans. Ilość i amplituda składowych harmonicznych kształtuje barwę dźwięku. Barwa pozwala nam na rozpoznawanie osób i instrumentów, dlatego możemy założyć, że poczucie harmonii mamy wrodzone.

Częstotliwości dźwięków w muzyce

Oktawa

Interwał muzyczny składający się z dwóch dźwięków, w którym wyższy ma częstotliwość dwa razy większą od niższego. Są to dźwięki, które postrzegamy jako tożsame. Nazywają się tak samo, tylko dla rozróżnienia podajemy nazwę oktawy. Oktawa jest interwałem podstawowym i w jej granicach został zbudowany cały system muzyczny. Częstotliwości kolejnych oktaw tworzą postęp geometryczny o współczynniku 2.

$$\begin{aligned}f_2 &= f_1 * 2 \\f_3 &= f_2 * 2 = f_1 * 4 \\f_4 &= f_3 * 2 = f_2 * 4 = f_1 * 8 \\f_5 &= f_4 * 2 = f_3 * 4 = f_2 * 8 = f_1 * 16\end{aligned}$$

Itđ.

Kwinta

Interwał kwinty, to dwa dźwięki, których częstotliwość wyższego jest o $3/2$ (1,5) wyższa od niższego. Taki interwał nazywamy kwintą naturalną, albo harmoniczną czystą. Jeśli od częstotliwości f_1 utworzymy oktawę $f_1 * 2$, to kwinta ze swoją częstotliwością $f_1 * 3/2$ podzieli oktawę na pół. Jednak aby uzyskać dźwięk o częstotliwości $f_1 * 2$, trzeba dźwięk kwinty ($f_1 * 3/2$) podnieść o mnożnik $4/3$, a to już jest interwał kwarty. Kwinta czysta razem z czystą kwartą tworzą oktawę.

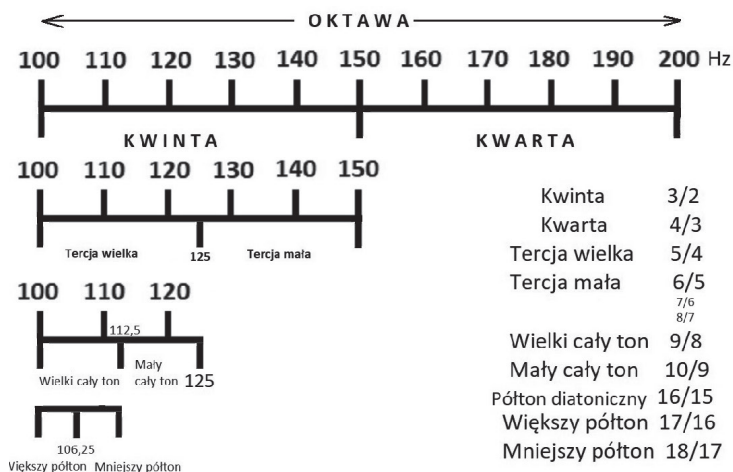
$$f_2 = f_1 * 2 = f_1 * \frac{3}{2} * \frac{4}{3}$$

Wydawało by się, że to współczynnik $\sqrt{2}$ podzieli oktawę na połowę, ale tak nie jest z uwagi na nieliniowy charakter wzrostu częstotliwości.

Tercja

Tercja wielka, to interwał o współczynniku częstotliwości $5/4$. Częstotliwość tercji harmonicznie czystej dzieli kwintę na połowę. Razem z naturalną tercją małą $6/5$ wypełniają kwintę.

Dla zobrazowania tego zjawiska użyjmy przykładowych częstotliwości:



Rys. Liniowa skala częstotliwości i ich podział

W badaniach i obliczeniach częstotliwości używa się logarytmów. Logarytm o podstawie 2 jest wykorzystywany do obliczeń częstotliwości stopni skali muzycznych. Logarytm o podstawie 10 ułatwia badania natężenia dźwięku. Dzięki funkcji logarytmicznej można w czytelny sposób wykonać wykresy przebiegów w dużych przedziałach.

Historia dźwięków wzorcowych

Przez stulecia funkcjonowały dowolne wysokości dźwięku, od którego rozpoczynano strojenie instrumentów. Instrumenty solowe nie wymagały dokładnego „umieszczenia się” w spektrum dźwiękowym, zależało to od wrażliwości grającego, ale gdy była potrzeba gry zespołowej, wówczas wszystkie instrumenty musiały zostać zestrojone ze sobą. Zwykle za wzorzec wybierano instrument, którego przestrojenie było najbardziej pracochłonne. Istniały też granice wynikające z konstrukcji instrumentów, a także ze skali ludzkiego głosu. Bardzo skomplikowanym instrumentem były organy kościelne, i to one przez stulecia były brane za lokalny wzór wysokości strojenia, również instrumenty dęte były używane jako wzorcowe. Podstawą strojenia organów była piszczałka 8-stopowa dla dźwięku C. Niestety, z uwagi na duże zmiany częstotliwości drgań słupa powietrza w zależności od temperatury i wilgotności, nie były zbyt dokładne. W 1711 roku John Shore (1662–1752), muzyk angielskiego dworu, opatentował kamerton, który utrzymywał jedną wysokość dźwięku (423,5 Hz) w różnych

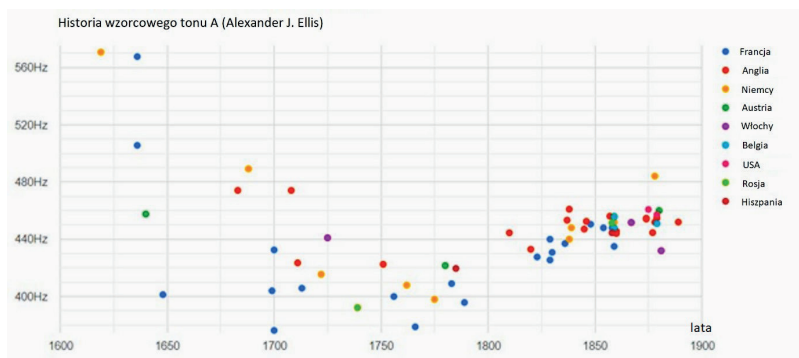
warunkach środowiskowych i wytwarzał bardzo czysty ton. Kamerton bardzo długo nie znajdował szerokiego zainteresowania. Dopiero na początku XIX wieku stał się bardziej popularny, kiedy to stał się precyzyjnym instrumentem naukowym. Wielu naukowców zajmowało się muzyką i to ich badania zaowocowały ustanowieniem międzynarodowego standardu wysokości koncertowego tonu „a”. Pomimo ogromnego rozwoju elektronicznych przyrządów, kamerton jest używany również dzisiaj jako niewielkie źródło wzorcowego dźwięku.

Najbardziej znanym badaczem wykorzystującym kamertony był francuski naukowiec Jules Antoine Lissajous (1822–1880), który wynalazł optyczną metodę ich kalibracji, a także przyczynił się do stworzenia standardu $a=435$ Hz.

Szybki rozwój budowy fortepianów w XIX w. spowodował potrzebę unifikacji wysokości ich strojenia, gdyż ich konstrukcja nie pozwalała na duże wahania wysokości stroju. Zachowane kamertony z XVIII i XIX wieku mają częstotliwości od 409 do 457 Hz, jednak najczęściej są nastrojone w okolicach 430–445 Hz.

Dopiero w 1938 roku na konferencji w Londynie przyjęto wysokość dźwięku $A = 440$ Hz, a w 1953 roku tę wysokość przyjęła Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna, jako R 16, a po reformie w 1975 jako **ISO 16**. Mimo międzynarodowej standaryzacji, obecnie upowszechniło się podniesienie dźwięku „a” do 442 Hz. Tak stroi się fortepiany w USA, Danii, Francji, Norwegii, Szwajcarii, we Włoszech i na Węgrzech, a 443 Hz to częstotliwość panująca w Niemczech, Austrii, Rosji, Szwecji i Hiszpanii.

Strojenie od dźwięku $a = 432$ Hz jest w niektórych kręgach uznawane za rezonujące z naturą, jednak nie ma historycznych i fizycznych przesłanek na wyjątkowość tego dźwięku. Muzyka wykorzystuje wszystkie słyszalne częstotliwości, i tylko od wykonawcy i słuchacza zależy w jaki sposób ją postrzegamy.



Zmiany częstotliwości wzorcowej w historii według Alexandra Johna Ellisa (1814–1890)

Systemy strojenia

Strój naturalny

Strój naturalny opisał Ptolemeusz w 136 r.

Każdy dźwięk można rozłożyć na składowe harmoniczne, których częstotliwości są wielokrotnością częstotliwości podstawowej. Te harmoniczne są podstawą do tworzenia czystych interwałów. Harmoniczne jednego dźwięku układają się w stopnie „systemu naturalnego”, ale gdy chcemy zbudować kolejne dźwięki od innego stopnia systemu naturalnego, to potrzebujemy innych dźwięków, te pierwsze się nie przydają, a wykonanie kilku powtórzeń tej operacji powoduje całkowite odejście od częstotliwości początkowych.

Od dźwięku o dowolnej częstotliwości policzmy stopnie zbudowane z kolejnych składowych harmonicznych. Dla przykładu zaczniemy od 220 Hz. Kolejne harmoniczne sprowadzimy oktavami w dół do interwału oktawy 220 – 440 Hz.

Do dwudziestej harmonicznej otrzymamy kolejny dźwięki:

harmoniczna	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
220	440	660	880	1100	1320	1540	1760	1980	2200	2420	2640	2860	3080	3300	3520	3740	3960	4180	4400
w oktawie	440	330	440	275	330	385	440	247,5	275	302,5	330	357,5	385	412,5	440	233,8	247,5	261,3	275
Podział	2/1	3/2	4/2	5/4	6/4	7/4	8/4	9/8	10/8	11/8	12/8	13/8	14/8	15/8	16/8	17/16	18/16	19/16	20/16

Przykładowy ciąg harmonicznych.

Podział	Częstotliwość [Hz]	Centy od podstawy	Nazwa
1/1	220	0	pryma
17/16	233,75	104,9554	
9/8	247,5	203,91	Sekunda wielka
19/16	261,25	297,513	
5/4	275	386,3137	Tercja
11/8	302,5	551,318	
3/2	330	701,955	Kwinta
13/8	357,5	840,5277	Seksta neutralna
7/4	385	968,826	Septyma czysta
15/8	412,5	1088,2687	Septyma wielka
2/1	440	1200	Oktawa

Częstotliwości stroju naturalnego obliczone od kolejnych harmoniczných

Przy zastosowaniu szerszego podziału struny i zrezygnowaniu z niektórych harmoniczných, otrzymamy strój naturalny 12 tonowy:

interwał	Strój naturalny	Centy od podstawy	Równomiernie temperowany	Różnica w centach
pryma	1/1	0	1	0
sekunda mała	16/15 = 1,066 (6)	111,7313	1,05946	11,7313
sekunda wielka	9/8 = 1,125	203,91	1,12246	3,91
tercja mała	6/5 = 1,2	315,6413	1,1892	15,6413
tercja wielka	5/4 = 1,25	386,3137	1,25992	-13,6863
kwarta czysta	4/3 = 1,33 (3)	498,045	1,33484	-1,955
kwarta zwiększona	45/32 = 1,40625	590,2237	1,4142	-9,7763
kwinta czysta	3/2 = 1,5	701,955	1,4983	1,955
seksta mała	8/5 = 1,6	813,6863	1,5874	13,6863
seksta wielka	5/3 = 1,66 (6)	884,3587	1,6818	-15,6413
septyma mała	9/5 = 1,8	1017,5963	1,7818	17,5963
septyma wielka	15/8 = 1,875	1088,2687	1,8877	-11,7313
oktawa czysta	2/1 = 2	1200	2	0

Strój naturalny 12 tonowy w porównaniu do równomiernie temperowanego

Strój naturalny jest praktykowany w muzyce mikrotonowej, a zależności pomiędzy dźwiękami są często pokazywane na skomplikowanych „przestrzennych” diagramach.



Grecki matematyk Pitagoras w V w. p.n.e. badał zależności współbrzmienia różnych dźwięków. Używał do badań monochordu. Za pomocą ruchomego mostka strunę można podzielić na dwie części, których długość można ustawić w dowolnym stosunku, aby uzyskać różne wysokości i interwały muzyczne. Zgodnie z tradycją odkrył związek między prostymi proporcjami długości struny a interwałami muzycznymi. Podział struny na sekcje w proporcjach $1/2$ lub $2/3$, daje interwały idealnej oktawy i czystej kwinty. Następnie bazując na dźwięku kwinty znów dzielił strunę w stosunku $2:3$. Po 12 takich operacjach uzyskał dźwięk odpowiadający w przybliżeniu dźwiękowi początkowemu. Niewielka

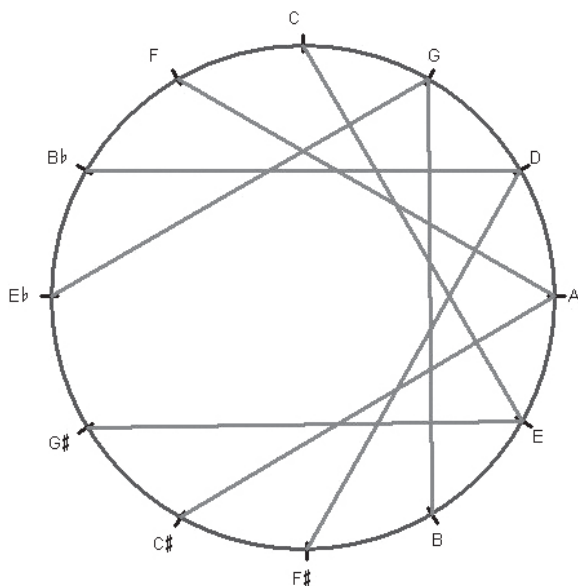
różnicę pomiędzy dźwiękiem uzyskanym poprzez kroki kwintowe i oktawowo nazwano komatem pitagorejskim (o komatach szczegółowo później). Efektem tych działań jest wybranie 12 częstotliwości, które stały się podstawą muzyki i określają dwanaście klawiszy w oktawie.

Strój temperowany

Strój średnionowy (mezotoniczny, meantone)

Pitagorejski sposób strojenia był używany do średniowiecza, ale już w kolejnej epoce, dla kompozycji wielogłosowej, stały się niezbędne tercje. Tercja wielka i mała wypełniają interwał kwinty i tworzą akordy dur-mol. Niestety, tercje, które powstają w oparciu o piątą harmoniczną, nie wpasowują się idealnie ani w drugą, ani w trzecią harmoniczną. Powstające rozbieżności to kolejne komaty, a w strojeniu kolejne „wilki”. Wilki wynikają z niezamknięcia się w oktawie bardzo pomniejszonych kwint. Zostaje jedna bardzo duża kwinta, oraz cztery "wilcze" tercje. Dudnienia tercji są bardzo podobne do dudnień kwint, czy oktafów, dlatego istnieje zawsze chęć uzyskania strojenia interwałów bez dudnień. Z wielu względów jest to niewykonalne, dlatego potrzebne są różne ograniczenia. Rozwój muzyki wielogłosowej wymusił na budowniczych instrumentów klawiszowych inny sposób strojenia. Jeśli od Pitagorasa do średniowiecza królowała kwinta, to w renesansie najważniejsza stała się tercja. Czyste tercje wymagają zwężenia (temperowania) kwint, a w efekcie tych zabiegów powstają uśrednione całe tony. Przez kolejne 300 lat najpopularniejszym strojem stał się strój średnionowy. Wówczas każdy wykonawca stroił swój instrument przed każdym graniem i zwykle też w przerwach pomiędzy utworami, dlatego powinien to być łatwy sposób strojenia. W stroju mezotonicznym uzyskujemy aż osiem czystych tercji wielkich C–E, D–Fis, Es–G, E–Gis, F–A, G–H, A–Cis, B–D. A robimy to w taki sposób:

Zaczynamy od dźwięku C – jego wysokość zwykle zależała od grającego, który dopiero od XVIII w. mógł posłużyć się kamertonem. Od C stroimy czystą tercję wielką w górę, czyli C–E. Następnie stroimy cztery kwinty „budujące” tę tercję, czyli C–G, G–D, D–A i A–E. Te cztery kwinty równo zwężamy. Mamy już dźwięki C, D, E, G, A i od tych dźwięków stroimy czyste tercje: C–E już mamy, od D w dół B i w górę Fis, od E w górę Gis, od G w górę H i w dół Es, a od A w dół F i w górę Cis. W efekcie mamy dźwięki: C, Cis, D, Es, E, F, Fis, G, Gis, A, B, H.



Tercje czyste w stroju średniotonowym

W tym samym czasie muzycy i naukowcy modyfikowali strój średniotonowy według różnych preferencji. Akceptowano niezbyt czyste tercje, dla uzyskania ładniejszych kwint i domykania koła kwintowego. Niektórzy budowniczy instrumentów poszli w kierunku zwiększenia liczby klawiszy w oktawie, ale ten sposób zachowania czystości interwałów się nie upowszechnił.

Różne sposoby strojenia zostały szczegółowo opisane w książce *Dawne temperacje* Marka Pilcha i Marka Toporowskiego.

Strój równomiernie temperowany

Równomierne rozłożenie komatu pitagorejskiego na 12 kwint było znane już w starożytności. Opisał je w swoich tekstach Arystoksen (Aristoxenus), uczeń Arystotelesa, również znane było i używane w Chinach. W Europie w czasach nowożytnych równą temperację kwint opisał Johann Georg Neidhardt w 1732 r. jako jedną z możliwości strojenia. Często jako ojca równomiernej temperacji podaje się Jana Sebastiana Bacha (1685–1750) i jego cykl kompozycji *Das Wohltemperirte Clavier*. Jednak ten cykl dotyczy właściwej (dobrej) temperacji i większość badaczy uznaje ją za nierównomierną.

Strój równomiernie temperowany był w Renesansie używany do strojenia gitary i podobnych instrumentów, jednak dopiero za sprawą fortepianów zdominował

Harmoniczna	a	b	h	c	dis	d	dis	e	f	fis	g	gis	a
podstawowa	220	233,082	246,942	261,626	277,183	293,665	311,127	329,628	349,228	369,994	391,995	415,305	440
druga	440	466,164	493,883	523,251	554,365	587,33	622,254	659,255	698,456	739,989	783,991	830,609	880
trzecia	660	699,246	740,825	784,877	831,548	880,994	933,381	988,883	1047,68	1109,98	1175,99	1245,91	1320
czwarta	880	932,328	987,767	1046,5	1108,73	1174,66	1244,51	1318,51	1396,91	1479,98	1567,98	1661,22	1760
piąta	1100	1165,41	1234,71	1308,13	1385,91	1468,32	1555,63	1648,14	1746,14	1849,97	1959,98	2076,52	2200
szósta	1320	1398,49	1481,65	1569,75	1663,1	1761,99	1866,76	1977,77	2095,37	2219,97	2351,97	2491,83	2640
siódma	1540	1631,57	1728,59	1831,38	1940,28	2055,65	2177,89	2307,39	2444,6	2589,96	2743,97	2907,13	3080
ósma	1760	1864,66	1975,53	2093	2217,46	2349,32	2489,02	2637,02	2793,83	2959,96	3135,96	3322,44	3520
dziewiąta	1980	2097,74	2222,47	2354,63	2494,64	2642,98	2800,14	2966,65	3143,05	3329,95	3527,96	3737,74	3960
dziesiąta	2200	2330,82	2469,42	2616,26	2771,83	2936,65	3111,27	3296,28	3492,28	3699,94	3919,95	4153,05	4400
jedenasta	2420	2563,9	2716,36	2877,88	3049,01	3230,31	3422,4	3625,9	3841,51	4069,94	4311,95	4568,35	4840
dwunasta	2640	2796,98	2963,3	3139,51	3326,19	3523,98	3733,52	3955,53	4190,74	4439,93	4703,95	4983,66	5280
trzynasta	2860	3030,06	3210,24	3401,13	3603,37	3817,64	4044,65	4285,16	4539,97	4809,93	5095,94	5398,96	5720

Teoretyczne wyliczenia częstotliwości kolejnych półtonów wraz z ich harmonicznymi. Kolorami zostały zaznaczone niektóre harmoniczne o zbliżonych częstotliwościach, które usłyszymy jako dudnienia.

inne sposoby temperacji. To coraz większa popularność fortepianów spowodowała akceptację tego stroju przez ogół świata muzycznego. W połowie XIX stulecia stroiciele w fabrykach fortepianów dopiero uczyli się tego stroju. Jeszcze do końca XIX w. spotyka się instrumenty strojone w nierównomierniej temperacji, ale już od początku XX wieku strój równomiernie temperowany zdominował muzykę do tego stopnia, że obecnie nawet większość społeczeństwa nie zdaje sobie sprawy z różnorodności systemów strojenia instrumentów muzycznych.

Strój równomiernie temperowany charakteryzuje się równymi półtonami, których częstotliwości wzrastają o $\sqrt[12]{2}$. Jest to ciąg geometryczny o ilorazie ciągu, który wynika z matematycznego podziału oktawy na dwanaście równych „kawałków”. Jeśli pomnożymy 12 razy przez siebie $\sqrt[12]{2}$, to otrzymamy 2. W ten sposób rozkładamy komat pitagorejski po równo zwiężając każdą kwintę.

W rzeczywistym fortepianie nie jest możliwe osiągnięcie tak precyzyjnego dostrojenia każdego półtonu, z różnych powodów, mimo najlepszych chęci stroiciela. Pomiar częstotliwości wykazują nawet spore odchyłki.

Strój równomiernie temperowany o czystych kwintach

Rozważmy również takie rozłożenie częstotliwości półtonów, aby wszystkie kwinty były czyste. W efekcie takiego zabiegu tracimy czystość oktaw, ale warto poznać ten sposób strojenia, gdyż w różnych instrukcjach strojenia funkcjonują takie zdania: „...decymy powinny być szybsze niż tercje”, „...ustaw czystsze kwinty kosztem kwart” itp. Każda z takich rad prowadzi do lekkiego rozszerzenia oktaw, a to zbliża taką temperację do tej o której tu mowa. Swoje rozważania poszerzę o strój równomiernie temperowany o czystych interwałach duodecymy (oktawa z kwintą), oraz dwóch oktaw z kwintą.

Dla równego podziału kwinty na 7 półtonów ilorazem ciągu będzie pierwiastek 7 stopnia z 1,5

$$\sqrt[7]{1,5} = \mathbf{1,05963402}$$

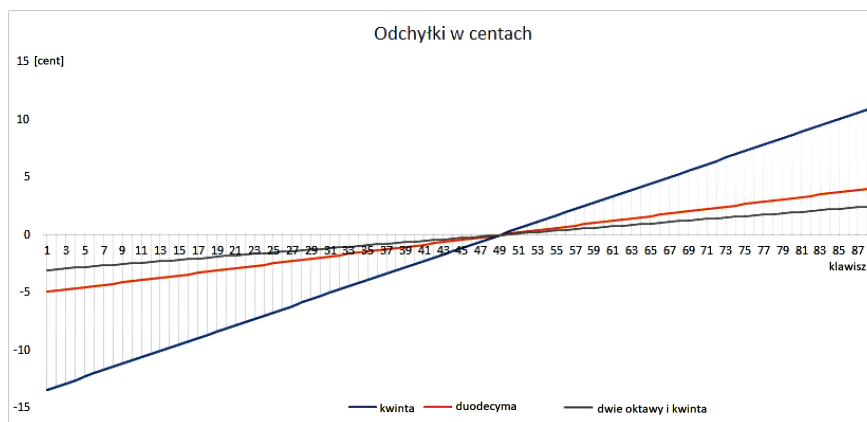
Równy podział duodecymy (19 półtonów) wymaga stałego mnożnika

$$\sqrt[19]{3} = \mathbf{1,05952606}$$

a interwał dwóch oktaw i kwinty (31 półtonów) będzie potrzebował:

$$\sqrt[31]{6} = \mathbf{1,05950169}$$

Po obliczeniu częstotliwości wszystkich klawiszy fortepianu porównałem wyniki do tych obliczonych dla stroju równomiernie temperowanego z czystymi oktawami. Pokazałem to na wykresie, gdzie na osi odciętych jest numer klawisza, a na osi rzędnych odchyłka od stroju równomiernie temperowanego wyrażona w centach. Na takim samym wykresie jest pokazana krzywa strojenia Railsbacka.



Wykres strojenia dla systemu czystych kwint

Jak wynika z obliczeń odchyłki tych strojów od stroju równomiernie temperowanego z czystymi oktavami są podobnie ukierunkowane jak rzeczywiste pomiary, z których wynika krzywa strojenia Railsbacka. Oczywiście, powyższy wykres wynika z prostych matematycznych wyliczeń, jednak pokazuje kierunek, który sugeruje, że w rzeczywistym fortepianie można uzyskać prawie czyste kwinty (duodecymy) i prawie czyste oktawy. Jeśli weźmiemy pod uwagę zjawisko nieharmoniczności, wówczas okaże się, że teoretyczna krzywa strojenia czystych kwint (duodecym) będzie bardzo podobna do rzeczywistej krzywej, którą obserwujemy w fortepianach nastrojonych w stroju równomiernie temperowanym.

Inne podziały oktawy

Cent

Aleksander John Ellis (1814–1890), angielski filolog i teoretyk muzyki wprowadził w 1875 roku jednostkę, która dzieli półton w stroju równomiernie temperowanym na 100 równych odcinków, w skali logarytmicznej.

Tę jednostkę nazywamy centem. Stąd w oktawie jest 1200 centów, a interwał jednego centa obliczymy wzorem:

$$f_2 = f_1 * \sqrt[1200]{2} = f_1 * 2^{\frac{1}{1200}}$$

Cent jest logarytmiczną jednostką miary interwału, czyli bezwymiarowym „współczynnikiem częstotliwości” f_2/f_1 . Nie ma konwersji z Hz na centy i odwrotnie.

Jeden cent to liczba, która pomnożona przez siebie 1200 razy daje liczbę 2.

Znając częstotliwości f_1 i f_2 dwóch dźwięków, liczbę centów mierzących odstęp od wyższego (f_2) do niższego (f_1) można obliczyć z następującego wzoru:

$$n = 1200 \log_2 (f_2/f_1)$$

Podobnie, jeśli zna się częstotliwość f_1 i liczbę n centów w przedziale od f_1 do f_2 , to f_2 można obliczyć ze wzoru:

$$f_2 = f_1 * 2^{\frac{n}{1200}}$$

Przykłady:

- Oktawa: $f_1 = 220$ Hz, $f_2 = 440$ Hz,
 $n = 1200 * \log_2 (440/220)$
 $n = 1200 * \log_2 (2/1)$
 $n = 1200 * 1$
 $n = 1200$ [centów]
- Kwinta czysta: $f_1 = 220$ Hz, $f_2 = 330$ Hz,
 $n = 1200 * \log_2 (330/220)$
 $n = 1200 * \log_2 (3/2)$
 $n = 1200 * 0,5849625$
 $n = 701,955$ [centów]
- Tercja naturalna: $f_1 = 220$ Hz, $f_2 = 275$ Hz,
 $n = 1200 * \log_2 (275/220)$

$$n = 1200 * \log_2 (5/4)$$

$$n = 1200 * 0,32192809488736$$

$$n = 386,3137 \text{ [centów]}$$

Zastosowanie logarytmów pozwala na łatwiejsze obliczenia interwałów. Zamiast mnożenia i dzielenia ułamków mamy dodawanie i odejmowanie logarytmów (np. centów) i tak dwie oktawy i tercja naturalna to:

$$1200 + 1200 + 386,3137 = 2\,786,3137 \text{ centów},$$

a cztery naturalne kwinty to:

$$701,955 + 701,955 + 701,955 + 701,955 = 2\,807,82 \text{ centów},$$

Różnica 21,5063 centów daje nam komat syntoniczny.

Gdy chcemy obliczyć kwintę pomniejszoną o komat syntoniczny, po prostu odejmujemy 21,5063 od 701,955 centów, a gdy chcemy policzyć kwintę zwężoną o 1/4 komatu syntonicznego, to otrzymamy: 696,578 centów. Kwinta czysta pomniejszona o 1/12 komatu pitagorejskiego to $701,955 - 23,46/12 = 700$ c.

Aby jeszcze dokładniej zobrazować co to są centy, porównam je do klawiatury. Oczywiście jest, że w dowolnej oktawie mieści się 12 półtonów, a w kwincie 7, czyli interwał duodecymy będzie zawierał $12+7=19$ półtonów. Centy są podobnym podziałem, tylko sto razy dokładniejszym (100 „klawiszy” w obrębie półtonu) i ich używanie również nie przekłada się na częstotliwość.

Centyton

Jest to podział oktawy na 600 równych części, gdzie cały ton jest podzielony na 100 – stąd nazwa. 1 centyton jest równy 2 centom.

Milioktawa

Jest to podział oktawy na 1000 części.

Komaty

Naukowcy badający dźwięk poszukiwali sposobu na uzyskanie jakiegoś stopnia skali muzycznej używając różnych składowych harmoniczných. Jednak okazało się, że nie da się doprowadzić do dokładnego dopasowania tak stworzonych częstotliwości. Wynikające różnice nazwano komatami. Są to interwały wynikające z obliczeń matematycznych, które w rzeczywistych instrumentach nie są dokładnie odwzorowane, jednak ich znajomość ułatwia zrozumienie wielu aspektów temperacji. Kiedyś komatem określano każdy interwał mniejszy od całego tonu, jednak obecnie ta nazwa została przyjęta dla interwałów mniejszych od półtonu temperowanego.

Komat pitagorejski

Pierwszym i najbardziej znanym komatem, wynikającym z bliskiego spotkania się drugiej i trzeciej harmonicznej, jest komat pitagorejski. To właśnie Pitagorasowi przypisuje się badania, które doprowadziły do poznania, że dwanaście kwint prawie dokładnie pasuje do siedmiu oktaw.

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{128}$$
$$\frac{2}{3} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3} = \frac{4096}{531441} = \frac{1}{129,7463379}$$

Iloraz dzielników, czyli stosunek 129,7463379: 128 (można go zapisać również jako 531441/524 288) jest właśnie komatem pitagorejskim i wynosi 1,0136432647705078125

W centach będzie wynosił

$$n = 1200 * \log_2 1,0136432647705078125 = 23,46001038 \text{ centów.}$$

W stroju pitagorejskim ten komat objawia się jako różnica pomiędzy półtonem chromatycznym (apotomem), a półtonem diatonicznym (limą). W tym stroju półton chromatyczny (np. c-cis) ma rozmiar ok. 113,96 centów, a półton diatoniczny (np. c-des) ok. 90,23 centów.

Gdy posłużymy się częstotliwościami dźwięków skali muzycznej, to zaczynając od A₂ (subkontra) = 27,5 Hz, siedem oktaw wyżej, czyli a⁴ (czterokreślne), otrzymamy częstotliwość

$$27,5 * 128 = 3520 \text{ Hz,}$$

Dwanaście kwint od 27,5 Hz da nam częstotliwość 3568,015.

Bardzo trudno jest operować tak dużymi interwałami, więc dla ułatwienia pomiarów obliczenia sprowadzamy do zakresu jednej oktawy. Najczęściej jest to zakres częstotliwości obejmujący oktawę małą lub razkreślną, bo znajduje się w obszarze najlepszej słyszalności człowieka. Tym sposobem każdą kwintę której wyliczona częstotliwość wyjdzie poza obszar tej oktawy obniżamy (albo podwyższamy) oktawowo.

Dla przykładu policzmy częstotliwości kroków kwintowych sprowadzonych oktawami do zakresu 220 Hz – 440 Hz.

$$220 * \frac{3}{2} = 330 \text{ Hz}$$

$$330 * \frac{3}{2} = 495 \text{ Hz}$$

Częstotliwość jest poza naszym zakresem, więc obniżamy o oktawę, czyli dzielimy przez dwa

$$495/2 = 247,5 \text{ Hz}$$

następne kroki dadzą nam wyniki:

371,25; 278,4375; 417,65625; 313,2422; 234,93164; 352,397461; 264,298; 396,447144; 297,33536; 223,001518

Dwunasta kwinta jest wyższa od tonu początkowego (w naszym przykładzie) o 3,001518 Hz i nazwana została „wilczą kwintą”.

Możemy pójść dalej, licząc kolejne czyste kwinty, wówczas zamiast koła kwintowego uzyskamy spiralę kwintową. Kolejnym miejscem, gdzie prawie spotkają się kwinty z oktavami jest interwał złożony z 53 kwint, który zbliża się do 31 oktav z różnicą nazwaną **komatem Merkatora (Mercatora)** (3,615 centa). Odstęp pomiędzy dźwiękami w 53 stopniowej skali równomiernie temperowanej został nazwany **komatem Holdriana** i wynosi 22,6415 centów. Ten system został opisany w Chinach już w pierwszym wieku p.n.e.

Możemy to również wyliczyć zaczynając od 220 Hz, po wykonaniu 53 kroków kwintowo-oktawowych otrzymujemy częstotliwość 220,4494 Hz. Gdyby przyjąć system muzyczny oparty o taki podział, wówczas każda oktawa musiałaby mieć po 53 klawisze, dlatego ani budowniczowie, ani wykonawcy nie byłiby zadowoleni.

Komat syntoniczny

Kolejnymi komatami są różnice wynikające z tworzenia interwałów przy pomocy piątej harmonicznej (czwarta tworzy interwał dwóch oktav).

Piąta harmoniczna to odległość dwóch oktav i tercji wielkiej, który też odpowiada w przybliżeniu czterem kwintom. Jednak cztery czyste kwinty są szersze od piątej harmonicznej o **komat syntoniczny** zwany również **komatem Didymosa**, który wynosi 21,5063 centów.

Piątą harmoniczną zapiszemy jako:

$$f * 5 = f * 4 * \frac{5}{4}$$

Gdzie:

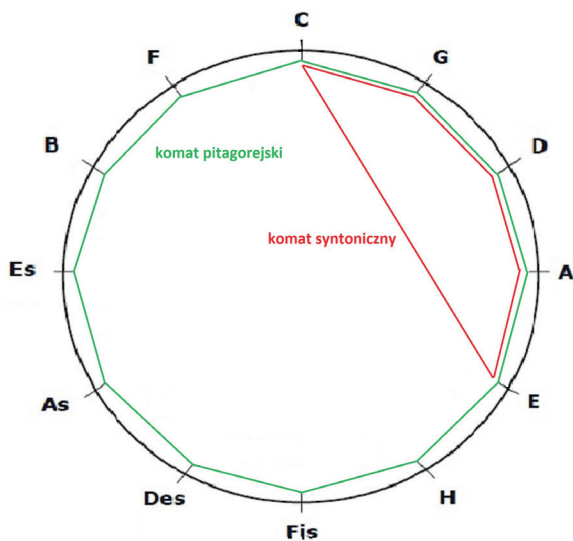
mnożnik 4 = dwie oktawy

mnożnik $\frac{5}{4}$ = tercja wielka

Cztery kwinty:

$$f * \left(\frac{3}{2}\right)^4 = f * 5,0625$$

Jeśli chcemy w kole kwintowym nastroić czystą tercję wielką, to musimy zwęzić cztery kwinty w jej obrębie, taki zabieg stosowano w temperacji średnio-tonowej. Komat syntoniczny musi być rozłożony pomiędzy tercję wielką i cztery kwinty tworzące tę tercję. Jeśli chcemy mieć czystą tercję, to „ukrywamy” komat syntoniczny, zwężając kwinty. Gdy chcemy zachować czyste kwinty, wówczas komat objawi się nam zbyt szeroką tercją. W przeszłości różnie był rozkładany ten komat. Pamiętać trzeba, że zwężone cztery kwinty służące do „wyczyszczenia” tercji biorą udział w rozkładaniu komatu pitagorejskiego, który jest tylko o schizmę większy. Jednak w zakres komatu syntonicznego wchodzi tylko cztery kwinty z tercją, a komat pitagorejski dotyczy wszystkich 12 kwint.



Graficzne przedstawienie komatów

Schizma (schisma)

Do zniwelowania komatu pitagorejskiego potrzebne jest zwężenie kwint, również do uzyskania czystej tercji jest potrzebne zwężanie kwint. Wydawałoby się, że węższe kwinty rozwiązują problem. Niestety tak się nie dzieje, ponie-

waż komat pitagorejski rozdzielamy na 12 kwint, a komat syntoniczny tylko na cztery. Różnica tych dwóch komatów nazywa się schizma i wynosi 1,95 centa. Jak już w czterech zwężonych kwintach uporamy się z komatem syntonicznym, to pozostałe 8 kwint będzie praktycznie czyste. Schizmą nazywamy też różnicę pomiędzy kwintą czystą, a równomiernie temperowaną. Schizmę możemy obliczyć również jako różnicę między ośmioma czystymi kwintami, a pięcioma oktavami z tercją wielką. Zdarza się, że schizmą nazywa się inne maleńkie interwały.

Komat enharmoniczny, dieza (diesis)

Ten komat również dotyczy piątej harmonicznej tworzącej tercję wielką, ale w połączeniu z drugą składową. Trzy kolejne tercje wielkie są węższe od oktawy o ten właśnie komat.

Oktawa to: $f * 2$

A trzy tercje wielkie to:

$$f * \left(\frac{5}{4}\right)^3 = f * 1,953125$$

Komat enharmoniczny ma rozmiar 41,058 centów.

Można również obliczyć różnicę pomiędzy oktavą, a czterema małymi tercjami. Ten komat nazywa się **większa dieza** i wynosi 62,57 centów.

Kleizma (kleisma)

Komat o nazwie kleizma jest różnicą pomiędzy interwałem duodecymy (oktawa + kwinta) wynikającym z trzeciej harmonicznej, a interwałem złożonym z sześciu tercji małych.

Duodecyma czysta to: $f * 3$

Sześć czystych małych tercji to:

$$f * \left(\frac{6}{5}\right)^6 = f * 2,985984$$

W centach kleizma ma rozmiar 8,11 c. W stroju równomiernie temperowanym tercje małe są mocno zwężone. Sześć takich tercji jest aż o pół tonu niższe niż duodecyma!

Komat septymowy (Archytasa, septimal comma)

Wykorzystanie siódmej harmonicznej tworzy nowe interwały, które rozszerzają strojenie poza powszechną praktykę, jednak te składowe wyrażnie wpływają na odbiór muzyki i trzeba je opisać. Podział $7/6$ tworzy interwał septymowej tercji małej, a $8/7$ to septymowy cały ton, znajdziemy również tryton septymowy $7/5$ oraz septymę czystą $7/4$.

W tym zagęszczeniu możliwych kombinacji wyróżnia się **komat septymowy** jako różnica pomiędzy dwoma czystymi kwartami, a septymą harmoniczną czystą.

Dwie czyste kwarty to:

$$f * \left(\frac{4}{3}\right)^2 = f * 1,77778$$

Septyma harmoniczną czystą to:

$$f * \frac{7}{4} = f * 1,75$$

Komat septymowy ma rozmiar **27,26** centów.

Komat sekstowy dekaфонiczny.

Na potrzeby podziału oktawy na 10 części (fortepian dekaфонiczny) został obliczony komat wynikający z różnicy interwału 7 oktaw i 10 sekt neutralnych $13/8$

Ten komat został obliczony przez prof. dr hab. Pawła Nurowskiego z Centrum Fizyki Teoretycznej Polskiej Akademii Nauk i wynosi 5,2766 centów

$$f * \left(\frac{13}{8}\right)^{10} = f * 128,39072556$$

$$f * 2^7 = f * 128$$

Różne sposoby zapisu dźwięków

Oktawy posiadają swoje nazwy: subkontra, kontra, wielka, mała, razkreślna, dwukreślna, trzykreślna, czterokreślna i pięciokreślna.

Poszczególne stopnie skali w oktawach zapisujemy literami alfabetu z dodatkowymi indeksami, podkreśleniem lub apostrofem. Dźwięki w oktawie subkonta mogą być zapisane dużą literą z dwójką jako indeksem dolnym C_2 lub dwoma podkreśleniami $\underline{\underline{C}}$. Spotyka się również zapis powtórzonych liter **AAA**. Stopnie skali muzycznej od oktawy małej w górę są zapisywane małą literą z indeksami górnymi, apostrofami, albo kreskami nad literą np.: c'' , c^2 , $\bar{c}$.

Skalę współczesnego fortepianu zapiszemy np. tak $A_2 - c^5$.

Obecnie coraz większą popularność zyskuje sposób oznaczania oktav w notacji MIDI, gdzie oktawy mają oznaczenie cyfrowe, a kolejne stopnie skali muzycznej oznaczane są tylko dużą literą. Kolejne oktawy otrzymały numerację od 0 (subkontra) do 8 (pięciokreślna). W takim sposobie zapisu skala fortepianu to $A0 - C8$.

W praktyce stroicielskiej można się spotykać z literowym oznaczeniem dźwięku i odpowiadającym mu numerem klawisza fortepianu, np. $A49$, $c52$ itp.

Sposoby zapisywania interwałów

Wczesne badania współbrzmień polegały na analizie podziału struny na mniejsze odcinki. Dlatego podstawą obliczeń były ułamki.

Oktawa to $1/2$, Kwinta to $2/3$, Kwarta $3/4$

Dodanie kwarty do kwinty polegało na pomnożeniu ułamków określających te interwały

$$2/3 * 3/4 = 6/12 = 1/2$$

Odjęcie kwarty od kwinty polega na podzieleniu

$$2/3 : 3/4 = 2/3 * 4/3 = 8/9$$

Cały ton będący efektem odjęcia kwarty od kwinty ma miarę ułamkową $8/9$

Tercja wielka to ułamek $4/5$

Odjęcie takiej tercji od kwarty da nam naturalny półton diatoniczny:

$$3/4 : 4/5 = 3/4 * 5/4 = 15/16$$

Itd.

Tym sposobem można obliczyć wszystkie interwały w muzyce bez określenia częstotliwości badanych dźwięków. Podział struny na różne części wyliczone matematycznie umożliwiał budowanie chordofonów chwytnikowych (gitara, lutnia, banjo itp.) Ten sposób obliczeń interwałów jest wygodny w przypadku ustalonej długości strun.

W XIX wieku, gdy już poznano fizyczne właściwości dźwięku, wygodniejsze stało się używanie częstotliwości drgań. Wynalezienie kamertonu pomogło ujednolicić wysokości strojonych dźwięków.

Stosunki częstotliwości odpowiednich dźwięków są odwróceniem stosunków długości części struny.

Dla wyliczenia częstotliwości dźwięków potrzebny jest mnożnik, czyli: częstotliwość wyższego dźwięku oktawy będzie dwa razy większa od podstawowej: $2 * f_1 = f_2$, czyli 2:1

Kwinta $f * 3:2$

Kwarta $f * 4:3$

Tercja wielka $f * 5:4$

Itd.

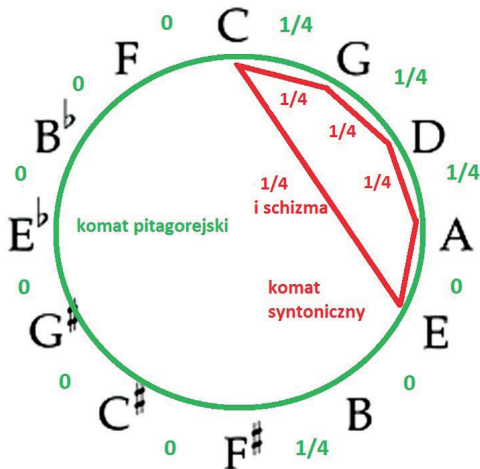
Takie pokazanie podziału częstotliwości ułatwia określenie współbrzmiących harmonicznym dźwięków.

Napisanie 2:1 mówi nam, że druga harmoniczna niższego dźwięku jest taka sama jak ton podstawowy wyższego – czyli mamy interwał oktawy. Możemy również określić ten interwał stosunkiem 4:2, 6:3, 10:5 pokazując które harmoniczne mamy na myśli.

Częstotliwości dźwięków to ciąg geometryczny, dlatego częstotliwość kolejnej oktawy jest dwa razy wyższa od poprzedniej, a w stroju równomiernie temperowanym każdy kolejny półton ma częstotliwość wyższą o $\sqrt[12]{2}$ od swojego dolnego „sąsiada”.

Różne sposoby zapisywania systemów strojenia

Stroje nierównomiernie temperowane najczęściej były pokazywane na kole kwintowym. Jest to bardzo czytelny sposób zapisania rozłożenia komatów na poszczególne kwinty.

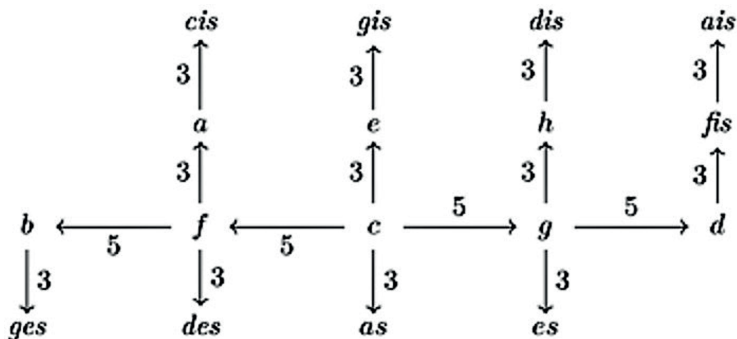


Werckmeister III

Przykład zapisu stroju temperowanego

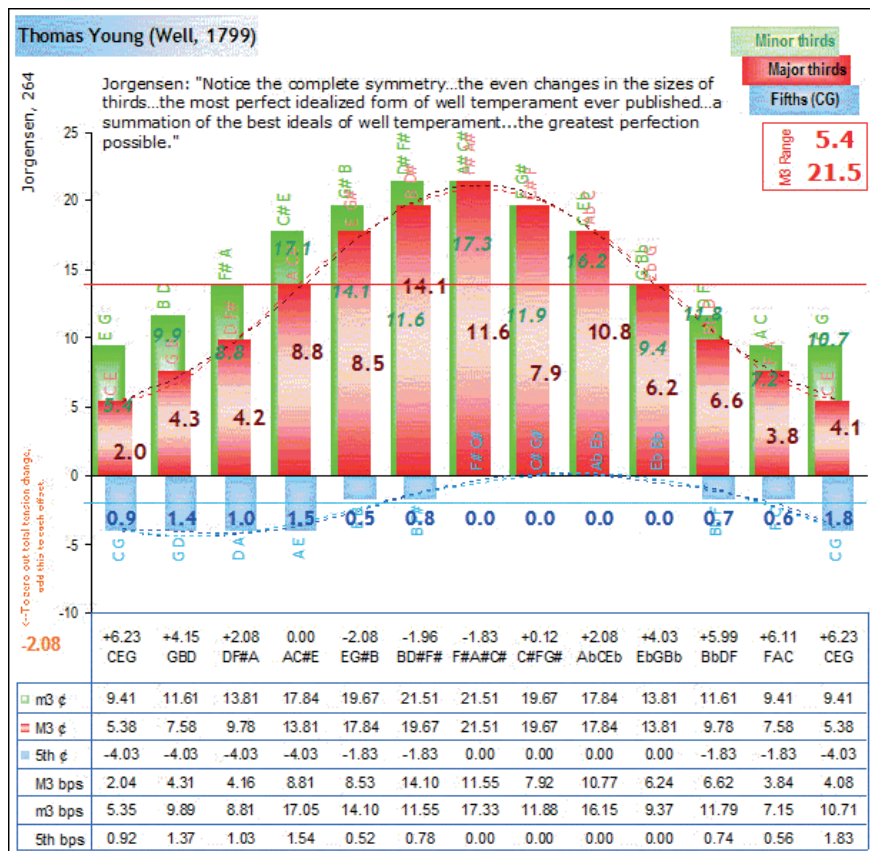
Z powyższego rysunku wynika, że tercja C–E jest rozszerzona o $1/4$ komatu syntonicznego, którego pozostała część jest ulokowana w trzech zwężonych kwintach. Te zwężone kwinty biorą również udział w rozkładaniu komatu pitagorejskiego, którego $1/4$ ulokowano w kwincie B–Fis. Pozostałe kwinty są czyste.

Spotkać można również taki graficzny sposób strojenia:



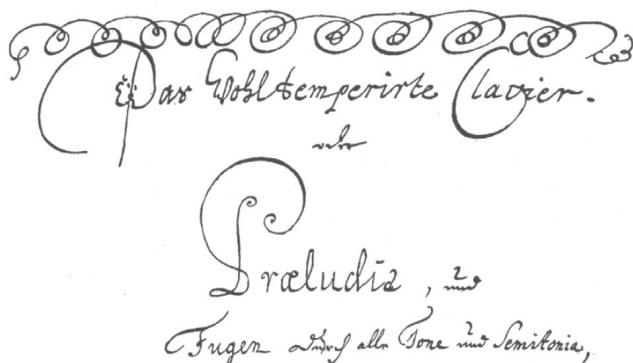
Strór średnlotonowy dla 17 klawiszy w okławie, gdzie najpierw stroimy dźwięk „c”, a do kolejnych klawiszy poruszamy się najkrótszą drogą czystymi interwałami według takiego schematu.

Dla stroiciela najważniejsze są dudnienia poszczególnych interwałów, więc obecnie można spotkać takie graficzne przedstawienie temperacji. Dudnienia są zależne od częstotliwości, więc te zapisy mają sens tylko dla środkowej oktawy z $a=440$ Hz.



Przykład zapisu obrazującego dudnienia i odchyłki różnych interwałów przy nierównomiernej temperacji. Zacerpnięte z <https://www.rollingball.com/TemperamentsFrames.htm> [dostęp: 2.02.2024]

Na stronie tytułowej *Das Wohltemperiete Clavier* Jan Sebastian Bach narysował linię, którą ponoć zapisał polecany sposób strojenia.



Fragment strony tytułowej *Das Wohltemperiete Clavier* z narysowaną na górze zawijaną linią.

Według kilku badaczy te „zawijasy” oznaczają dudnienia kolejnych interwałów podczas strojenia „dobrego temperamentu”.

Strojenie w praktyce

Fortepian jest instrumentem, w którym około 230 strun generuje dźwięki o 88 wysokościach, oraz nieskończone ilości składowych harmoniczných i nie-harmoniczných. Z tej ogromnej ilości fal akustycznych potrzebujemy wybrać niektóre, aby zadowolić muzyków i słuchaczy. Wybierane są częstotliwości według ustalonych zasad, o których napisałem w części teoretycznej. Oprócz parametrów „mierzalnych” w muzyce są zawarte emocje, które są przekazywane od wykonawcy, poprzez instrument, słuchaczowi. Dobrze przygotowany instrument powinien umożliwiać ten przekaz. Ludzkie ucho nie jest w stanie precyzyjnie „zmierzyć” częstotliwości jednego tonu, jednak bardzo dokładnie może porównywać i analizować dwa i więcej wspólnie brzmiących dźwięków. Dlatego tak ważne jest odpowiednie nastrojenie wszystkich strun w całym fortepianie.

Od drugiej połowy XIX wieku budowano fortepiany 7-oktawowe. W tym interwale mieści się również 12 kwint, a w takim instrumencie łatwo usłyszeć z jakimi problemami borykał się Pitagoras. Jednak zjawisko nieharmoniczności strun wymusza rozciąganie oktaw, a kwinty stają się mniej zwężone. W całej skali fortepianu 12 kwint praktycznie wpasowuje się w 7 oktaw.

Nie jesteśmy w stanie zmierzyć 128 harmoniczných struny A_2 , która powinna stroić z a^4 , ale zobaczmy jak strojone są kolejne oktawy w rzeczywistym fortepianie. Pomiarów dokonał Jacek Guzowski na potrzeby swojej pracy magisterskiej.

klawisz	1	13	25	37	49	61	73	85
częst. [Hz]	27,08	54,51	109,76	219,85	439,48	878,67	1760,05	3545,3

W tym strojeniu stosunek częstotliwości oktaw waha się od 1,999 do 2,014, w innych instrumentach ten współczynnik dochodzi nawet do 2,02. Jeśli uśrednimy te wyniki do 2,007 to wówczas rozpiętość 7 oktaw osiągniemy wyższym mnożnikiem:

$$f_7 = f_1 * 2,007^7 = f_1 * 131,16$$

Korzystając z tego powyższego mnożnika, siedem oktav powyżej częstotliwości 27,08 Hz powinno być 3 551,8 Hz, czyli bardzo blisko rzeczywistego pomiaru.

Ciekawie wyglądają pomiary częstotliwości kwint:

klawisz	1	8	15	22	29	36	43	50	57	64	71	78	85
Częst. [Hz]	27,08	40,87	61,34	91,74	137,59	207,04	310,14	464,81	696,9	1046	1566,7	2353,1	3545,3

Teoretycznie kwinty powinny być węższe niż 3/2 (czyli 1,5). Stosunek ich częstotliwości powinien wynosić dokładnie 1,498307, jednak z powyższych pomiarów wynika, że ten parametr wynosi od 1,4965 do 1,509 co daje średnią dla całego instrumentu 1,5011 – czyli wręcz rozszerzone.

Analogiczne zjawiska występują we wszystkich dźwiękach, stąd wniosek, że w rzeczywistym fortepianie, zbliżamy się bardzo do wyeliminowania komatu pitagorejskiego, a tym samym dopasowania 12 kwint do 7 oktav. Zjawisko nieharmoniczności strun na tyle poprawia domykanie się kwint, że nie potrzeba poszukiwać alternatywnych sposobów strojenia fortepianu. Zaniknęły też próby rozbudowania klawiatury o większą ilość klawiszy w oktawie. Zaakceptowano niestrojące tercje, seksty i septymy, tym chętniej im mniejsza jest amplituda ich składowych. W fortepianie miejsce pobudzenia większości strun (linia uderzenia) wypada w okolicach 1/8 jej długości. W ten sposób została zminimalizowana amplituda 7, 8 i 9 składowej harmonicznej, a to pozwala zaakceptować źle strojące interwały septymy, sekundy i nony.

Oczywiście, każdy instrument, ba, każda struna, ma swoje indywidualne cechy, ale w całości fortepian pretenduje do miana „króla instrumentów”.

Strojenie fortepianu, to czynność bardzo pracochłonna, wymagająca skupienia i ciszy otoczenia. W normalnych warunkach powinno trwać około 2 godzin, ale najlepiej rezerwować sobie dłuższy czas, aby mieć komfort pracy. W trakcie strojenia słuchamy i ustawiamy szybkość dudnień. To dość specyficzna umiejętność i trzeba się jej nauczyć.

Sposoby ustawiania równomiernej temperacji

W pierwszej kolejności trzeba nastroić wszystkie dźwięki w środkowej oktawie tak, aby były one podstawą wszystkich pozostałych dźwięków fortepianu. Tę czynność nazywamy ustawieniem temperacji. Opisując kolejne kroki będę używał skrótów:

- +3m, -3m – tercja mała (3 półtony)
- +3, -3 – tercja wielka (4 półtony)
- +4, -4, – kwarta czysta (5 półtonów)
- +5, -5 – kwinta czysta (7 półtonów)
- +6, -6 – seksta wielka (9 półtonów)
- +8, -8 – oktawa w górę, albo w dół (12 półtonów)
- +10, -10 – decyma (oktawa i tercja wielka – 16 półtonów)
- +12, -12 – duodecyma (oktawa i kwinta – 19 półtonów))
- +17, -17 – dwie oktawy i tercja (28 półtonów)

Możemy skorzystać z kilku metod ustawiania temperacji.

Metoda kwintowo-oktawowa.

Zaczynamy od nastrojenia dźwięków w środkowej oktawie, zaczynając od dźwięku a^1 według kamertonu, lub innego wzorca.

$$a^1 - 5 = d^1$$

$$d^1 - 5 + 8 = g^1$$

$$g^1 - 5 = c^1$$

$$c^1 - 5 + 8 = f^1$$

i tak kolejne kwinty

b^1 ; dis^1 ; gis^1 ; cis^1 ; fis^1 ; h^1 ; e^1 ; a^1

Kwinty stroimy tak, aby były lekko zwężone, średnio około 1 dudnienie na sekundę. Jeśli stroimy dolny dźwięk kwinty, to musimy go zostawić powyżej zera dudnień, a jeśli stroimy górny, to go obniżamy około 1 dudnienie poniżej czystej kwinty. W kwintach dudni trzecia harmoniczna dźwięku niższego z drugą harmoniczną wyższego, dlatego zmiana podstawowej składowej dźwięku o 0,5 Hz skutkuje zmianą szybkości dudnień o 1, lub o 1,5 Hz – w zależności który dźwięk stroimy.

Oktawy staramy się ustawić jak najdokładniej na zero dudnień.

Jeśli te dwanaście kroków kwintowo-oktawowych nie doprowadzą do dźwięku początkowego a^1 – trzeba powtórzyć całą operację.

Metoda kwintowo-kwartowa.

Kwarta jest dopełnieniem kwinty w oktawie, dlatego zamiast kroków kwinta plus oktawa, można od razu przejść do strojenia kwarty. W interwale kwarty współbrzmi 4 i 3 harmoniczna, dlatego usłyszymy szybsze dudnienia, a zmianę wysokości któregoś dźwięku o 0,5 Hz odbierzemy jako dudnienia odpowiednio o 2 i 1,5 Hz.

Oczywiście zaczynamy od a^1 i dalej:

$$a^1 - 5 = d^1$$

$$d^1 + 4 = g^1$$

$$g^1 - 5 = c^1$$

$$c^1 + 4 = f^1$$

i tak kolejne kwinty i kwarty

b^1 ; dis^1 ; gis^1 ; cis^1 ; fis^1 ; h^1 ; e^1 ; a^1

Kwarty w oktawie dopełniają zwężone kwinty, dlatego powinny być rozszerzone. Dudnienia rozszerzonych kwart powinny mieć szybkość około 1,5 Hz. Te dudnienia powinny nieznacznie rosnać idąc progresją kwart w górę klawiatury i podwajać się co oktawę. Znow, gdy nie zamknie się nam koło kwintowe, wszystkie czynności należy powtórzyć.

Metoda tercjoowo-sekstowa

W tej metodzie do „pracy” zostaje zaangażowana piąta harmoniczna, która w tercji równomiernie temperowanej dużo szybciej dudni. Oczywiście kwarty, kwinty i oktawy są nadal podstawą strojenia, ale tercja wielka i seksta mają zadania kontrolne. Najwygodniej poszerzyć zakres strojonych dźwięków do f w oktawie małej, wówczas czystość oktaw sprawdzimy decymami.

Zaczynamy od a^1

$$a^1 - 8 = a$$

$a - 3 = f$ (tercja rozszerzona do około 7 dudnień na sekundę, tę samą szybkość powinniśmy usłyszeć w decymie $f-a^1$)

$a + 4 = d^1$ (Sprawdzamy czy seksta $f-d^1$ dudni szybciej od tercji $f-a$, bo z tempem 8 Hz, przecież i tercja i kwarta są rozszerzone)

$$d^1 - 5 = g$$

$$g + 4 = c^1$$

$c^1 - 5 = f$ (tutaj korygujemy f i sprawdzamy, czy wszystkie dotychczasowe kroki zostały dobrze wykonane)

$a + 5 = e^1$ (sprawdzimy tercję w dół c^1-e^1 , sekstę $g-e^1$, oraz kwartę w górę e^1-a^1)

$e^1 - 4 = h$ (h i e^1 kontrolujemy dudnieniami tercji $g-h$ i seksty $g-e^1$)

$$h - 4 = \text{fis}$$

(kolejne dźwięki kontrolujemy tercjami, kwintami i kwartami z już nastrojonymi klawiszami)

$$\text{fis} + 5 = \text{cis}^1$$

$$\text{cis}^1 - 4 = \text{gis}$$

$$\text{gis} + 5 = \text{dis}^1$$

$$\text{dis}^1 - 4 = \text{b}$$

$$\text{b} - 4 = \text{f}$$

W tym sposobie strojenia mamy bardzo duże możliwości kontrolowania dokładności ustawienia kolejnych dźwięków poprzez interwał tercji wielkiej, tercji małej, seksty i decymy. Stroimy od f do f^1 , gdzie dudnienia tercji powinny zawierać się od 7 do 14 Hz, czyli bardzo wyraźne. Pomocnym interwałem jest również tercja mała (6/5), która jest zwężona i dudni z prędkością rozszerzonej seksty powyżej (5/3). Na przykład dudnienia tercji małej f – as powinny mieć tę samą szybkość co seksta $\text{as} - f^1$. Sprawdzenie tych dudnień upewnia nas o czystości oktawy $f - f^1$ nawet w przypadku niedokładności dźwięku as . Podczas strojenia, dudnienia pojawiają się tak samo przy zwężonym jak i rozszerzonym interwale, dlatego bardzo łatwo pomylić się strojąc kwinty i kwarty. Użycie tercji ułatwia temperację. Rozszerzone tercje wielkie dudnią bardzo wyraźnie i łatwo jest wychwycić błędy. Należy kontrolować kolejne tercje grając je w górę lub w dół co pół tonu, powinno się usłyszeć odpowiednio wzrastanie lub zmniejszanie się szybkości dudnień. Częstość dudnień powinna się podwajać co oktavę. W wielu instrumentach, szczególnie niższej klasy, jest bardzo dużo fałszywych dudnień, które zwykle są wolniejsze od dudnień tercji i łatwo je odróżnić od siebie.

Praktyczny sposób strojenia

Każdy stroiciel wypracowuje swoją metodę strojenia najwygodniejszą z jego punktu widzenia. Strojenie jest pracą bardzo zindywidualizowaną związaną z różną wrażliwością słuchu i różnymi odczuciami psychofizycznymi.

Opiszę sposób strojenia jaki wypracowałem przez ponad 35 lat praktyki. Sporo wiedzy zawdzięczam kolegom, których odpowiedzi i sugestie uświadomiły mi wiele szczegółów podejścia do manewrowania kluczem stroicielskim, jak też uchwycenia szczegółów poszczególnych współbrzmień.

Strojenie rozpoczynam dopiero wówczas, gdy instrument jest sprawny technicznie i wstępnie zintonowany. Po dopasowaniu rozmiaru końcówki klucza do kołków stroikowych fortepianu i wytlumieniu zewnętrznych strun chórów taśmą filcu, rozpoczynam strojenie od dźwięku a^1 (najczęściej ustawiam częstotliwość 442 Hz).

Słucham współbrzmienia dźwięków kamertonu i struny, następnie stroję oktawę niżej (a małe) i tercję poniżej, czyli f małe. Poszczególne kroki są takie:

Zaczynam od a^1 stroję od kamertonu 442 Hz

$$a = a^1 - 8$$

$f = a - 3$ (tercja rozszerzona do około 7 dudnień na sekundę). Dudnienia tercji $f-a$ i decymy $f-a^1$ powinny mieć tę samą częstotliwość, wówczas jestem pewny oktawy $a - a^1$. Taka sama szybkość dudnień powinna być słyszalna, gdy posłuchamy kamertonu A z dźwiękiem klawisza f. Polecam również słuchanie dudnień dźwięku F z kamertonem i klawiszem a^1 . Następnie postępuję zgodnie z metodą tercjowo – sektową, którą rozszerzam o kilka dźwięków powyżej a^1 .

W tym momencie mam nastrojone po jednej strunie każdego chóru od f do a^1 . Zwykle mam wytłumione paskiem filcu dźwięki aż do c^2 , więc dostrajam te struny sprawdzając oktawę, kwintę i tercję. Dodatkowo kontroluję interwałem decymy. W tercji wielkiej dudni piąta harmoniczna niższego dźwięku z czwartą harmoniczną wyższego. Czwarta harmoniczna to dwie oktawy w górę, dlatego szybkość dudnień tercji, decymy i dwóch oktaw z tercją powinny być takie same. Jest to metoda na dokładne zestrojenie oktaw.

Na przykład dudnienia tercji $f-a$ mają częstość ok. 7 Hz, tak samo decyma $f-a^1$, oraz interwał $f-a^2$ musi mieć tę samą szybkość dudnień.

Pojedyncze nastrojone struny w środkowej części klawiatury są teraz podstawą do strojenia pozostałych dźwięków. Następnie stroję schodząc w dół – poniżej f. Teraz już stroję po kolei każdą strunę. Do tłumienia używam klinów filcowych lub gumowych. Zaczynam od lewej struny, a środkową i prawą tłumię klinem. Staram się tak klinować struny, aby słyszeć tylko te dwie struny: wzorcową i strojoną. W niektórych przypadkach można cały chór traktować jako wzorzec, jednak na początku strojenia może to utrudniać pracę. W momencie przejścia z gładkich strun na owijane mamy dużą zmianę współczynnika nieharmoniczności. Zwykle pojawia się problem z dokładnym dostrojeniem oktaw i kwint. Tercje będą dudnić, może wolniej albo trochę szybciej, jednak ich dudnienia są zawsze, ale gdy nastrojona czysto oktawa spowoduje dudnienie kwinty powyżej 1 Hz, to zostanie uznane za błąd. Dlatego bardzo delikatne rozszerzenie (lub zwężenie) oktawy spowoduje akceptację i kwinty i oktawy.

Znów zajrzę do pomiarów wykonanych w 1986 r. przez Jacka Guzowskiego na fortepianie koncertowym „Steinway & Sons”. Pomiar częstotliwości zostały tam wykonane w sposób rzeczywisty, a stroiciel wykonał swoją pracę „na ucho”. Najniższe oktawy są rozciągnięte (dudnią) od 0,02 do nawet 0,82 Hz, a kwinty zwężone od 0,11 do 0,93 Hz. Jest też kilka kwint minimalnie rozszerzonych, co zapewne zostało spowodowane fałszywymi dudnieniami w strunach. Dud-

nienia tercji w tym najniższym rejestrze wynoszą 1–2 Hz. W najniższych rejestrach fortepianu amplituda wyższych składowych jest zwykle dużo większa niż tonu podstawowego, przez co zdudnienia tych najmocniejszych składowych mają wpływ na postrzeganie czystości stroju. Trzymam się zasady, że najpierw stroję lewą strunę, a pozostałe do niej unisono. Jeśli potrzebuję poprawić któreś dźwięki, to stroję od prawej struny w chórze. Otrzymuję wówczas dodatkową informację o jakości strun. W swojej praktyce strojenia basów postępuję tak, aby najmniejsze dudnienia były w duodecymach (oktawa + kwinta), oraz sprawdzam dudnienia przez dwie oktawy i tercję, aby progresja takich interwałów powodowała podobne dudnienia. W dobrych instrumentach można kontrolować również dudnienia interwału trzech oktaw i tercji. Szybkość tych dudnień powinna być dwa razy większa od tercji, czy decymy, bo współbrzmia 10 harmoniczna niższego dźwięku z podstawową wyższego. Czasem posiłkuję się flazoletami, aby wyeksponować interesujące mnie alikwoty. Również słucham progresji decym co pół tonu w dół i w górę, bo to pozwala mi ocenić jakości strojenia. Mimo iż teoretycznie te dudnienia powinny dość szybko zwalniać, to z uwagi na nieharmoniczność, ich szybkość jest podobna (kilka herców).

W mniejszych fortepianach i pianinach jest duży kłopot z brzmieniem basów. Krótkie struny wymuszają gruby, podwójny miedziany nawój, przez to struna generuje dużo składowych nieharmonicznych, a składowa podstawowa dźwięku jest bardzo słaba. Dodatkowo podłużne drgania tych strun powodują przesunięcia subiektywnego odbioru wysokości. Struna nastrojona poprawnie harmonicznie potrafi źle wybrzmiewać melodycznie. Na najniższych dźwiękach nie uda się zagrać melodii... Dobrze nastrojone basy powinny ładnie uzupełniać akordy grane w środkowych rejestrach i współbrzmieć z całością instrumentu. Gdybym miał porównać brzmienie fortepianu do orkiestry, to najniższe nuty porównałbym do kotłów orkiestrowych.

Po nastrojeniu basów przechodzę do zestrojenia chórów „wzorcowych” dźwięków. Zaczynam znów od lewej struny i wyciągając po kolei tłumiący pasek filcowy dostrajam skrajne struny do środkowej. W trakcie również kontroluję współbrzmienia tercji i decym, gdyż często struny się układają i ich strój się zmienia. Po zestrojeniu chórów przechodzę do strojenia dyszkantu. Stroję również kolejno wszystkie struny, jednak przy strojeniu jakiegoś dźwięku stroję mniej dokładnie oktawę wyżej. Zauważyłem, że i tak muszę stroić dwa razy każdy dźwięk, więc nie ma potrzeby od razu bardzo dokładnie zestrajać chórów. Strojąc najwyższe dźwięki porównuję oktawę, dwie oktawy oraz dwie oktawy i kwintę. W tym rejestrze jest największa nieharmoniczność, trzeba wypośrodkować błędy z niej wynikające. W interwale dwóch oktaw i kwinty

współbrzmi szosta harmoniczna niższego dźwięku z tonem podstawowym wyższego. Nieharmoniczność powoduje spore podniesienie tej szóstej składowej, dlatego jest nieznacznie wyższa od dźwięku wynikającego z czystych oktaw, ale takie nastrojenie dyszkantu ładniej współbrzmi z resztą instrumentu. Jeszcze raz powołam się na pomiary Jacka Guzowskiego. Przykładowo dźwięk g^4 powinien współbrzmieć z drugą harmoniczną g^3 , trzecią harmoniczną c^3 , czwartą składową g^2 , piątą harmoniczną dźwięku dis^2 , szóstą składową c^2 , oraz ósmą harmoniczną g^1 . Zobaczmy jak to wygląda w rzeczywistym fortepianie.

g^4	$1/2 g^3$	$1/3 c^3$	$1/4 g^2$	$1/5 dis^2$	$1/6 c^2$	$1/8 g^1$
3177,8	3162,9	3179,3	3178,5	3165,4	3185,1	b/d

Widać tutaj, że dźwięk g^4 najlepiej stroi z czwartą harmoniczną g^2 .

W innym przypadku (tabela poniżej) dźwięk e^4 jest nastrojony tak, aby wypósrodkować wszystkie ważne współbrzmienia.

e^4	$1/2 e^3$	$1/3 a^3$	$1/4 e^2$	$1/5 c^2$	$1/6 a^2$	$1/8 e^1$
2668,4	2665,14	2664,7	2673,77	2644,8	2677,5	b/d

Widzimy, że w obu tabelkach brakuje pomiarów ósmej harmonicznej. Wynika to z punktu uderzenia młotka w $1/8$ długości struny.

Praktyczne porady:

- W momencie wyciszania strun klinem albo taśmą filcową podnosić tłumiki. Trzeba sobie wyrobić nawyk naciskania prawego pedału za każdym razem, gdy chcemy klinować struny. W ten sposób zapobiegamy niszczeniu się filców tłumików dwu i trójkłowych. Gdy klin wyciszający strunę dociśnie filc tłumika do sąsiedniej struny, wówczas podnoszący się tłumik spowoduje rozrywanie się filcu.

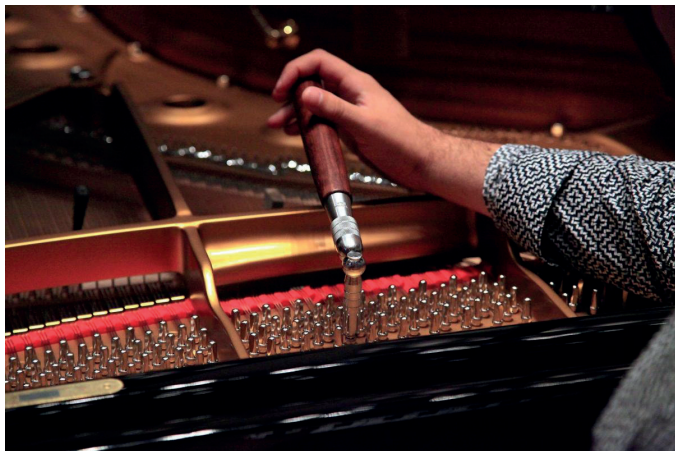


Uszkodzony filc tłumików

- Klucz stroicielski zakładać na kołek w taki sposób, aby linia klucza była (w miarę ośmiokątnej możliwości) w linii struny.
- Przy strojeniu usiąść wyżej niż pianista i ustawić się bokiem do klawiatury. W tej pozycji można oprzeć łokieć o obudowę instrumentu, a wówczas operowanie kluczem osadzonym wzdłuż linii struny jest łatwiejsze.



Prawidłowa pozycja pracy



Wzorcowe ułożenie klucza stroicielskiego.

Strojenie chórów

Jakość całego strojenia zależy w dużej mierze od czystości chórów. Trzy struny powinny być nastrojone na tę samą wysokość, jednak mimo największej naszej staranności dudnienia się pojawiają. Najważniejsze, aby te dudnienia nie były szybsze od 0,1–0,2 Hz (jedno dudnienie na 5–10 sekund). Podczas strojenia należy bardzo mocno uderzać w klawisze (nawet mocniej niż pianista w czasie koncertu). Te uderzenia mają na celu wyrównanie naprężenia na każdym odcinku struny. Lepiej, aby struna się ułożyła w trakcie strojenia, niż w trakcie koncertu. Tarcie na mostkach, agrałach i filcach wytłumiających powoduje różnice tych sił rozciągających, a w efekcie niestabilność stroju. Bardzo często trzeba wracać i korygować już zestrojone chóry, ale w efekcie uzyskujemy stabilny strój.

Operowanie kluczem stroicielskim

Spotykałem się z różnymi podpowiedziami dotyczącymi pracy z kluczem. Każdą z nich trzeba sprawdzić praktycznie i wybrać taką, która nam odpowiada. Ja wypracowałem sobie taki cykl ruchów: po założeniu klucza na kołek i wydzieleniu klinem strojonej struny stukam w klucz, aby lekko nagiąć (pochylić) kołek w dół. Dzięki temu struna dostaje „impuls” i poruszają się wszystkie styki struny z innymi elementami na całej jej długości. Dodatkowo dostaję informację jak mocno „trzyma” kołek, czy potrzebuję strój obniżyć, czy podnieść oraz że jestem na właściwym kołku! Następnym ruchem obracam kołek, aż do momentu wyczucia, że się obrócił w strojnicy. Jeśli ten ruch jest zbyt mały wówczas kołek tylko „naciągnie” warstwę drewna wokół siebie i za chwilę

kołek wróci do swojego początkowego ustawienia. Następnie ruchem obrotowo – pochylającym staram się ustawić odpowiednią wysokość strojonego dźwięku. Jeśli wszystkie kołki będą w ten sam sposób ustawiane, wówczas cały instrument będzie się podobnie zachowywał i będzie stabilniejszy. Kołek powinien być zostawiony w takim położeniu, że gdy zostanie lekko odchylony w górę podnosił strój, a odchylony w dół z podobną siłą – bardzo nieznacznie go obniżał. Przy mocnym uderzeniu w klawisz struna nie powinna się rozstrajać.

Dokładność strojenia

Należy stroić jak najdokładniej, jednak w praktyce potrzebna jest pewna tolerancja, w ramach której uważa się, że wysokości dźwięków w fortepianie są poprawne. Spotkałem się z różnymi określeniami tego parametru. W XIX wiecznych instrukcjach ustawiania temperacji napisano „kwinty zwężaj aby nie raziły, a tercje rozszerzaj aby były ładne....”

W strojeniu na słuch różne interwały były różnie opisywane. Dokładność strojenia unisonów i oktaw określano jako 1 dudnienie na 10 sekund.

W obecnych, cyfrowych czasach, dźwięki nastrojonego fortepianu powinny znajdować się na wysokości obliczonej z dokładnością do 2 centów. Jest to dość spora tolerancja, gdyż 2 centy to około 0,5 Hz przy dźwięku 440 Hz ale są instrumenty w których struny podczas wybrzmiewania potrafią zmieniać swoją częstotliwość o ok. 2 centy, więc może taka tolerancja jest usprawiedliwiona.

Różności

Wilgotność

W powietrzu znajduje się para wodna, która ma różnorodny wpływ na konstrukcję fortepianu. Ilość pary wodnej w m^3 powietrza jest nazywana wilgotnością bezwzględną. W zależności od temperatury i ciśnienia atmosferycznego zmienia się ilość tej pary od pełnego nasycenia do zera. Najbardziej nas interesuje ile tej pary wodnej jest w powietrzu w stosunku do ilości maksymalnej, jaka może się „zmieścić” w 1m^3 powietrza. Jest to wilgotność względna i ten parametr jest mierzony higrometrem (wilgotnościomierzem), a wynik podawany w procentach. Podnoszenie temperatury powietrza powoduje spadek wilgotności względnej pomimo niezmiennej ilości pary wodnej. Powietrze o temperaturze $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ nasyci się parą wodną w ilości $0,77\text{ g/m}^3$. Gdy zostanie podgrzane do $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ wilgotność względna spada do $5,3\%$. W przypadku obniżania temperatury powietrza nasyczonego parą wodną zachodzi proces kondensacji pary wodnej i obserwujemy powstawanie rosy.

Wszystkie drewniane elementy, a płyta rezonansowa fortepianu w szczególności, zmieniają swoje wymiary w zależności od wilgotności względnej.



Krzywa nasycenia przy stałym ciśnieniu.

Płyta rezonansowa jest wypukła w kierunku strun. Pęczniecie drewna powoduje wzrost tej wypukłości i mocniejsze naciągnięcie strun – strój się podnosi. Podczas wysychania, drewno płyty rezonansowej się kurczy i jej wyniesienie maleje, a tym samym obniża się siła naciągu. Przy krzyżowym układzie strun różnie zmieniają się te siły i najwyraźniej rozstrajają się dźwięki oktawy wielkiej, małej i razkresłnej.

Pitagoras w kuźni.

Wiele jest wersji tej popularnej historii, która mówi, że Pitagoras przechodząc obok kuźni usłyszał raz harmonijne, a raz nieprzyjemne współbrzmienia dźwięków, co miało wynikać z różnicy ciężarów młotów, którymi kowale uderzali w kowadło. To zainspirowało go do badań nad dźwiękami. Jest to nieprawda, gdyż wysokość dźwięku nie zależy od ciężaru młota, a od budowy kowadła. Zresztą nie zachowały się do dziś żadne teksty Pitagorasa, więc odnalezienie powodów, dla których ten matematyk zajął się badaniem dźwięków jest niemożliwe. Ten mit powstał prawdopodobnie dopiero w Średniowieczu.

Rozciąganie oktaw w związku z kubaturą sali

Prędkość rozchodzenia się fal akustycznych w powietrzu nie zależy od częstotliwości i na pewno nie trzeba podwyższać najwyższej oktawy strojąc fortepian w dużej sali dla poprawnego odbioru tych dźwięków w ostatnich rzędach słuchaczy. Co prawda w czasach antycznych uważano, że wysokie dźwięki poruszają się szybciej, niż niskie, ale już wówczas obalono ten mit. W dodatku najważniejszym odbiorcą dźwięków fortepianu jest sam pianista, dyrygent i najbliżsi muzycy, więc to oni muszą mieć jak najdokładniej nastrojone dźwięki. Obecnie, w dobie urządzeń elektronicznych do pomiaru częstotliwości dźwięku, łatwo jest to zmierzyć i wykazać fałszywość tej teorii.

Strój 432 Hz

Na temat stroju 432 napisano bardzo dużo nieprawdziwych i sensacyjnych informacji, jakoby był mistycznym, naturalnym i terapeutycznym. Niestety większość z tez popierających wyjątkowość tego stroju jest wyssana z palca i nie ma potwierdzenia w nauce. Strój 432 jest prawie ćwierć tonu niższy od 440 i powoduje rozdrażnienie wśród słuchaczy z słuchem absolutnym, bo nie wiadomo czy dany dźwięk to „c”, a może jeszcze „h”... Muzyka wykorzystuje dźwięki od 16 do 20 000 Hz i przypisywanie jednej częstotliwości wyższości nad innymi prowadzi na manowce. Obniżenie stroju wykonywanej muzyki może zmieniać jej odbiór emocjonalny, dlatego takie zabiegi są stosowane w życiu artystycznym.

Bach nie wymyślił i nie wprowadził równomiernej temperacji

Już w rozdziale o temperacjach wspomniałem, że przypisywanie Janowi Sebastianowi Bachowi wymyślenia i wprowadzenia równomiernej temperacji jest błędem. Ten system strojenia znany był już w starożytności, a w czasach kiedy żył J. S. Bach opisał go Johann Georg Neidhardt jako jeden z wariantów temperacji. Ten sposób nie zdobył akceptacji ówczesnych muzyków ze względu na brak różnic kolorystycznych w brzmieniu poszczególnych tonacji.

Nie ma potrzeby stroić fortepianu co dwa tygodnie, gdy podnosimy strój powyżej ćwierć tonu

Współczesne pianina i fortepiany mają tak solidną konstrukcję, że gdy jest potrzeba podnieść strój o ponad ćwierć tonu, to po prostu trzeba to zrobić podczas jednego strojenia. Owszem zapewne trzeba się więcej natrudzić i kilka razy robić poprawki, ale strój powinien pozostać stabilny. Oczywiście, jeśli są założone nowe struny, czy kołki, to strój się obniży, ale to już inna sprawa.

Nie ma potrzeby stroić fortepianu po przestawianiu instrumentu

Rozstrajanie się fortepianu jest normalnym zjawiskiem, zależy od intensywności grania, zmian wilgotności i temperatury. Nowe struny rozciągają się przez kilka miesięcy, ale nie trzeba stroić po każdym przestawieniu instrumentu. Naprężenia występujące podczas normalnej eksploatacji są o wiele większe niż te spowodowane transportem. Chyba, że fortepian spadnie ze schodów.... Niekiedy właściciele pianin twierdzą, że nie stroili instrumentu przez kilkanaście lat, bo przecież stoi w tym samym miejscu... Forte-piany koncertowe powinny być strojone przed każdym koncertem!

Elektroniczne pomiary

Najważniejszą różnicą pomiędzy elektronicznymi pomiarami a ludzkim uchem jest to, że ludzki mózg analizuje dźwięki, potrafi selektywnie wybierać czego chce słuchać. Przyrząd elektroniczny mierzy drgania, bez analizy. Owszem jest świetnym pomocnikiem, tak jak urządzenie GPS wspomagają kierowcę, ale to kierowca decyduje i odpowiada za trasę.

Większość profesjonalnych urządzeń elektronicznych służących do strojenia mierzy i zapisuje częstotliwości składowych harmonicznych i na podstawie tych pomiarów oblicza krzywą strojenia. Potrafi również wprowadzić poprawkę wysokości dla większych różnic pomiędzy dźwiękiem zmierzonym a strojonym. Nawet pokazując wykres widmowy podpowie, który dźwięk zintonować. Analizowałem darmowy program „Entropy Piano Tuner”, który podlega

ciągłemu rozwojowi. W tym programie wymagane jest nagranie dźwięków każdego klawisza, których częstotliwości są następnie tak korygowane, aby zminimalizować entropię, a tym samym spowodować najlepszą harmonię całego instrumentu. Największą bolączką takich programów jest dokładność rzeczywistych pomiarów przed strojeniem i w trakcie strojenia.

Popularne elektroniczne mierniki częstotliwości dźwięków wskazuje najniższą częstotliwość, która ma wystarczającą amplitudę, aby zostać zmierzona. Podczas wybrzmiewania dwóch dźwięków występują dudnienia i czasem miernik pokaże częstotliwość tych dudnień. Ludzie większą uwagę przywiązują do najwyższego dźwięku ze wszystkich dźwięków w danym czasie. Jest to wrodzona cecha słuchu, nazwana słuchem melodycznym. Grając melodię na fortepianie za pomocą akordów, staramy się stosować akordy w takich przewrotach, aby linia melodyczna wypadła na najwyższym dźwięku akordu. Jeśli w przestrzeni akustycznej występuje kilka dźwięków jednocześnie, to nasz słuch skupia się najpierw na najwyższym dźwięku, dlatego słuchając dudnień mamy odczucie, że słyszymy wahania amplitudy tego wyższego dźwięku. Ludzki mózg analizuje dźwięki, potrafi je selektywnie oddzielać. Urządzenie elektroniczne mierzy drgania, bez ich analizy. W czasie strojenia fortepianu stroiciel wykonuje subiektywną ocenę dźwięków opartą o swoje doświadczenie i wrażliwość. Chociaż obiektywne pomiary dostarczają naukowo uzasadnionych, dokładnie powtarzalnych danych, to i tak ostateczny efekt będzie wykorzystywany i oceniany przez ludzi.

Duplex i struny alikwotowe

Budowniczowie fortepianów dążą do jak najlepszego wyrównania siły brzmienia w całej skali instrumentu. Dla zwiększenia głośności wyższych rejestrów stosowano zwielokrotnienie ilości strun na jeden klawisz, jednak okazało się, że większa ilość strun w chórze niż trzy, to spory techniczny kłopot, a efekty niezadowolające. W swojej praktyce spotkałem dwa pianina, które w dyszkanicie miały po cztery struny. Julius Blüthner opracował i wprowadził do swoich instrumentów czwartą strunę, która nie była pobudzana młoteczką, ale rezonowała z grającym dźwiękiem. Ta metoda wzbogacania brzmienia została opatentowana w 1872 roku i nazwana „Aliquot system”. Blüthner zastosował struny alikwotowe strojone oktawę wyżej niż dźwięki podstawowe w rejestrach od g^1 do g^3 , a od gis^3 do c^5 te struny strojono unisono.

Firma Steinway & Sons opracowała i opatentowała w tym samym co Blüthner 1872 roku inny sposób wzbogacania brzmienia poprzez dźwięki alikwotowe. Do tego celu wykorzystano te fragmenty strun, które do tamtej pory były wytłumiane. Odcinki strun, które tworzą dźwięk po uderzeniu młoteczka są

ograniczone kapodastrem z przodu i sztyftami na mostku z tyłu. W tym pomysłę część struny za mostkiem została oddzielona dodatkowym prożkiem by w ten sposób mogła swobodnie wibrować, a regulując jej długość można było wpływać na wysokość tonu. Jeśli długości tych strun będą skorelowane z długością aktywną struny w stosunku $1/4$; $1/3$; $1/2$ lub $1/1$ wówczas automatycznie zostaną zestrojone z dźwiękami fortepianu. Wszystkie struny fortepianu są wzajemnie połączone poprzez mostki i płytę rezonansową, dlatego każdy dźwięk „znajdzie” swoje wyższe alikwoty wśród tych strun rezonujących. To rozwiązanie nazywamy „tylnym duplexem”. W fortepianie „Steinway & Sons” model „O” tylny duplex jest nastrojony dwie oktawy wyżej od dźwięku d^1 do h^2 , od c^3 do g^3 strojony jest o duodecymę wyżej, od gis^3 do e^4 te struny wybrzmiewają oktawę wyżej, a od f^4 do c^5 stroją unisono. „Przedni duplex” wykorzystuje fragmenty strun pomiędzy kapodastrem a kołkami stroikowymi. Również zastosowano tam dodatkowy prożek odcinający fragment struny. Zasada działania jest podobna, ale dochodzi tam jeszcze do wzmocnienia podłużnych wibracji strun, tworząc „kryształiczny”, „srebrzysty” dyszkant.

System Duplex stał się bardzo popularny i montowany jest w większości fortepianów.

Część strun w wysokich rejestrach fortepianu nie jest tłumiona przez mechanizm tłumikowy i te struny również rezonują z innymi dźwiękami w podobny sposób tworząc taką „aureolę” dźwiękową po stłumieniu dźwięku właściwego.

Zakładanie strun gładkich

Skręcenie struny wokół własnej osi jest jednym z powodów powstawania fałszywych dudnień. Struny te są zwykle zakładane w taki sposób, że po nawinięciu na jeden kołek stroikowy struna przeciągana jest do kołka zaczepowego i z powrotem, aby zostać zawinięta na kolejnym kołku stroikowym. Taki sposób zakładania nie daje kontroli nad przypadkowym skręceniem struny wokół własnej osi. Jest inny sposób zakładania tych strun, trochę bardziej pracochłonny, ale zapewniający minimalną możliwość takiego skręcenia.

Po odwinięciu z rolki ucinamy drut o odpowiedniej długości, położony układa się w kształt litery O. Zginamy go w połowie w taki sposób, aby otrzymać kształt litery C. Strunę zahaczamy o kołek zaczepowy, a następnie obydwa końce zawijamy na kołki stroikowe.

Szczegóły takiego zakładania strun znajdują się na filmie: <https://www.youtube.com/watch?v=nXQZgxG0MUc> [dostęp: 05.01.2024]

Bibliografia

Brian Capleton, *Theory and Practice of Piano Tuning*, 2007

Aleksander Błahodir, Adam Falimirski, *Fortepian: jego historia i budowa w zarysie*, Wiedza Muzyczna, Lwów 1928

Antonina Cierpiot, Praca dyplomowa, *Zagadnienia intonacji podczas gry na skrzypcach w stroju średnionowym w teorii i praktyce*, Katowice, 2019

Mieczysław Drobner, *Akustyka Muzyczna*, Polskie Wydawnictwo Muzyczne, 1973

Mieczysław Drobner, *Instrumentoznawstwo i akustyka*, Polskie Wydawnictwo Muzyczne, 1986

Ross W. Duffin, *Jak system równomiernie temperowany popsuł harmonię (i dlaczego powinno cię to obchodzić)*, 2016

F. Alton Everest, *Podręcznik akustyki*, Wydawnictwo Sonia Draga, 2004

Iwan Fadiejew, Siergiej Ałton, *Naprawa i strojenie fortepianów i pianin*, Bydgoszcz, 1990

Jacek Guzowski, praca dyplomowa, *Problemy strojenia fortepianów związane z nieharmonicznością drgań strun*, Akademia Muzyczna im. Fryderyka Chopina w Warszawie, Wydział Reżyserii Dźwięku, Warszawa 1986

Simon Hendry, *Inharmonicity od Piano Strings*, 2008

Stuart Isacoff, *Temperacja, Jak muzyka stała się polem bitwy wielkich umysłów zachodniej cywilizacji*, 2018

Mikołaj Kirpluk, *Podstawy akustyki*, Warszawa, 2011

Rufin Makarewicz, *Dźwięki i fale*, Poznań, 2004

Mirosław Mastalerz, *Historia kamertonu*, Gdańsk, 2002

Edward Ozimek, *Dźwięk i jego percepcja, aspekty fizyczne i psychoakustyczne*, PWN Warszawa 2018

Marek Pilch, Marek Toporowski, *Dawne temperacje Podstawy akustyczne i praktyczne wykorzystanie*, pod redakcją Marka Toporowskiego, Akademia Muzyczna im. Karola Szymanowskiego w Katowicach, 2014

Arthur A. Reblitz, *Piano servicing, tuning, and rebuilding*

Olivier Sacks, *Muzykofilii opowieści o muzyce i mózgu*, 2009

Alexander Stephon, *Jazz i fizyka tajemniczy związek ze strukturą wszechświata*, 2017.

Strony Internetowe:

Analiza dźwięków muzycznych,

<https://sound.eti.pg.gda.pl/student/akmuz/02-Analiza.pdf> [dostęp:15.02.2024]

Jonathan D. Bellman, Dziewiętnastowieczne stroje instrumentalne a muzyka Chopina,

<https://www.czasopisma.nifc.pl › article › download> [dostęp:15.02.2024]

Aleksander Bogucki, Paweł Nurowski, Akustyczny fortepian dekafoniczny,

<https://www.youtube.com/watch?v=H6PhB-UcwUA> [dostęp:15.02.2024]

Ewa Chrościan, Systemy mikrotonowe Aloisa Háby i ich zastosowanie w wybranych kwartetach smyczkowych, Kraków,

<https://cejsh.icm.edu.pl/cejsh/element/bwmeta1.element.desklight-a6aa882e-2401-4fe4-b503-7b7e7cea45a8> [dostęp:15.02.2024]

Pochaman Chumnantas, Nieharmoniczność w prawdziwych strunach gładkich i z nawojem,

<https://era.ed.ac.uk/bitstream/handle/1842/13393/Chumnantas1995.Pdf?sequence=1> [dostęp:15.02.2024]

Michèle Duguay, The Influence of Unequal Temperament on Chopin's Piano Works,

<https://www.proquest.com/openview/b22142f819768ae82464aa2679f4ef68/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y> [dostęp:15.02.2024]

Dźwięczne Bzdury, 432 Hz – prawdziwa historia,

<https://dzwiecznebdury.wordpress.com/2018/08/13/432-hz-prawdziwa-historia/> [dostęp:15.02.2024]

Fortepian o poszerzonej klawiaturze do 108 klawiszy, Why extend the range of the Piano, <https://www.stuartandsons.com/108keys.html> [dostęp:15.02.2024]

N. Giordano, Explaining the Railsback stretch in terms of the inharmonicity of piano tones and sensory dissonance,

https://www.researchgate.net/publication/283540953_Explaining_the_Railsback_stretch_in_terms_of_the_inharmonicity_of_piano_tones_and_sensory_dissonance [dostęp:15.02.2024]

Historia kamertonu, Historical Notes: a Brief Chronicle of the Tuning Fork,

<https://www.whipplemuseum.cam.ac.uk/explore-whipple-collections/acoustics/historical-notes-brief-chronicle-tuning-fork> [dostęp:15.02.2024]

Konsonanse i dysonanse, Wikipedia,

https://en.wikipedia.org/wiki/Consonance_and_dissonance [dostęp:15.02.2024]

Konstanty Kostrzewski, Matematyczny kącik muzyczny,

<https://www.deltami.edu.pl/2020/07/matematyczny-kacik-muzyczny-i-pitagorejczycy-i-matematyczne-poczatki-muzyki/%0A> [dostęp:15.02.2024]

Mark Lindley, An historical survey of meantone temperaments to 1620,
https://www.academia.edu/1504088/An_historical_survey_of_meantone_temperaments_to_1620 [dostęp:15.02.2024]

Minutephysics, Dlaczego nie można idealnie nadać fortepianu,
<https://www.youtube.com/watch?v=1Hqm0dYKUx4> [dostęp:15.02.2024]

Joe Monzo, Harmoniczne diagramy kratowe,
<http://www.tonalsoft.com/monzo/lattices/lattices.htm#> [dostęp:15.02.2024]

Chris Murray, Nieharmoniczność strun,
<https://publicwebuploads.uwec.edu/documents/Musical-string-inharmonicity-Chris-Murray.pdf> [dostęp:15.02.2024]

David Pinnegar, Kolor muzyki w czasach Mozarta,
https://www.academia.edu/37951978/THE_COLOUR_OF_MUSIC_IN_MOZARTS_TIME_A_journey_from_Couperin_to_Chopin_Examination_of_reconstruction_of_Mozart_Fantasias_K594_and_K608_for_Mechanical_Clock [dostęp:15.02.2024]

Rolf Music Blog, Jakie stroje stosował Bach?
<https://www.rolf-musicblog.net/what-tunings-did-bach-use/> [dostęp:15.02.2024]

Strojenie fortepianu metodą entropii,
<http://piano-tuner.org/pl/entropy> [dostęp:15.02.2024]

Margo Schuler, Historia temperacji,
<http://www.medieval.org/emfaq/harmony/pyth5.html> [dostęp:15.02.2024]

Podłużne drgania struny,
https://www.speech.kth.se/music/5_lectures/conklin/longitudinal.html
[dostęp:15.02.2024]

Konstanty Kostrzewski, Matematyczny kącik muzyczny,
<https://www.deltami.edu.pl/2020/07/matematyczny-kacik-muzyczny-i-pitagorejczy-i-matematyczne-poczatki-muzyki/%0A> [dostęp:15.02.2024]

Amerykańska strona o badaniach dźwięków fortepianu i jego percepcji
<https://pubs.aip.org/asa/jasa> [dostęp:15.02.2024]

Aleksander P. Sęk, Percepcja dźwięku,
<https://repozytorium.ukw.edu.pl/bitstream/handle/item/780/Sek%20Percepcja%20dzwieku.pdf?sequence=1&isAllowed=y> [dostęp:15.02.2024]

Claudio Di Veroli, Unequal Temperaments Theory, History and Practice,
<https://www.braybaroque.ie/temper/preview.html> [dostęp:15.02.2024]

Claudio Di Veroli, Zwyczajna temperacja, 2002, https://www.academia.edu/23493362/Tuning_the_t%C3%A9mp%C3%A9rament_ordinaire_2002 [dostęp:15.02.2024]

Anna Wiśniewska, Podziały interwałów przy użyciu metod geometrii
wykreślnej, http://212.191.48.28/dmdocuments/notes_muzyczny/NM5_1_5.pdf
[dostęp:15.02.2024]

Widmo brzmienia fortepianu,
<https://www.youtube.com/watch?v=5xjD6SRY8Pg> [dostęp:15.02.2024]

Wrocławski portal matematyczny, Matematyka w muzyce,
<http://www.matematyka.wroc.pl/matematyka-wokol-nas/w-muzyce>
[dostęp:15.02.2024]

